

Strukturelle Aspekte der Nebenläufigkeit

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Thomas Lengauer

aus Berlin

1976

D 188

STRUKTURELLE ASPEKTE DER NEBENLÄUFIGKEIT

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Thomas Lengauer

aus Berlin



Digitized by the Internet Archive
in 2026

1. Bericht: Prof. Dr. H.-J. Töpfer
Fachbereich 19 (Mathematik) der
Freien Universität Berlin
Berlin, Germany
2. Bericht: Dr. A. W. Holt
Massachusetts Computer Associates
Wakefield, Massachusetts, U.S.A.



Einreichung der Arbeit: 21. 8. 1975

Mündliche Prüfung: 9. 7. 1976



Mein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. H.-J. Töpfer für seine großzügige Unterstützung in allen Belangen meines Studiums und meiner wissenschaftlichen Tätigkeiten. Diese Förderung war eine wesentliche Voraussetzung für das Entstehen der vorliegenden Arbeit.

Darüberhinaus danke ich den Herren Dr. D. Baum, Dr. A.W. Holt und Prof. Dr. H.-J. Töpfer für zahlreiche anregende Gespräche.

Berlin 39, den 22. August 1975

INHALTSVERZEICHNIS

1.	Einleitung	2
2.	Mathematische Preliminarien	5
3.	Zur Semantik von Nebenläufigkeitsmodellen	21
4.	Das diskrete Modell für eigentliche Nebenläufigkeit	42
5.	Die dem Modell der "strengen Netze" unterliegende Nebenläufigkeitsstruktur	51
6.	Strenge Netze als Mittel zur Darstellung von Systemverhalten	73
7.	Ablaufbegriffe auf der Schaltsequenzmenge eines allgemeinen Petri-Netzes	85
8.	Determiniertheit von Nebenläufigkeitsstrukturen	99
	Bezeichnungen	121
	Literaturverzeichnis	122

1. Einleitung

Nebenläufigkeit ist ein Gegenstand verbreiteter Untersuchungen (siehe Literaturhinweise). Es gibt zahlreiche diskrete Systemmodelle, die dazu dienen sollen, die Nebenläufigkeitsstruktur (concurrency structure, control structure) von Systemen zu beschreiben. Eine Übersicht gibt [PeBr74]. Alle diese Modelle entstanden aus dem Versuch, von möglichst vielen Systemeigenschaften, die für die Nebenläufigkeitsstruktur ohne Belang sind, zu abstrahieren. Daß trotz der gleichen Zielsetzung die Modelle so verschieden ausfallen, liegt daran, daß der Begriff "Nebenläufigkeit" zunächst gar nicht klar definiert ist. Das jeweilige Modell übernimmt die Präzisierung dieses Begriffs: Zur Nebenläufigkeitsstruktur eines Systems im Sinne eines Modells gehören alle Aspekte des Systems, die durch das Modell beschrieben werden. Aus der Vielzahl der Modelle für Nebenläufigkeit ergibt sich so eine Vielzahl verschiedener Definitionen von Nebenläufigkeit. Jede derartige Definition wird erhalten, indem die anschaulichen Vorstellungen, die mit dem Begriff "Nebenläufigkeit" verbunden sind, aus anderem Blickwinkel durch die Konstruktion eines Modells präzisiert werden. Das bedeutet zunächst, daß dieser Begriff ein Sammelsurium von Sachverhalten und Phänomenen bezeichnet.

Nun ist aber schon anschaulich klar, daß auf irgendeine Weise alle diese Untersuchungen über Nebenläufigkeit demselben "Gegenstand" gewidmet sind und deshalb gewisse grundlegende Gemeinsamkeiten haben müssen. Ich meine daher, daß sich die scheinbare Verschiedenheit und formale Unvergleichbarkeit der einzelnen Modelle gliedern und teilweise aufheben ließe, wenn man eine

Basis aus Gemeinsamkeiten dessen fünde, was die einzelnen Modelle beschreiben. Der semantische Inhalt dieser strukturellen Basis müßte dann auch dem formalen Charakteristikum sehr nahe kommen, das ein diskretes Systemmodell zu einem Nebenläufigkeitsmodell werden läßt, und wird im folgenden als "eigentliche Nebenläufigkeit" bezeichnet. Mir scheint eine bestimmte Art, Systemaktivitäten darzustellen, charakteristisch für Nebenläufigkeitsmodelle zu sein. Bezeichnet man die in einem diskreten Systemmodell zum Ausdruck kommende Struktur einer Systemaktivität als "das vom Modell beschriebene und durch die Systemaktivität geäußerte Systemverhalten", so bedeutet offenbar gerade eine bestimmte Struktur des durch das Modell induzierten Systemverhaltens die Tatsache, daß das Modell sich mit Nebenläufigkeit beschäftigt. Es ist deshalb zu erwarten, daß die Konstruktion eines Modells für eigentliche Nebenläufigkeit, d.h. eines Modells, das genau die Strukturen der oben erwähnten Basis beschreibt, als Resultat einer genauen Analyse der Vorgänge bei der Modellierung von Systemaktivitäten in Nebenläufigkeitsmodellen zu erhalten ist.

In Abschnitt 3 wird der Versuch gemacht, durch eine tiefgehende Analyse und Interpretation der Vorgänge bei der Übersetzung von Systemaktivitäten in den Kontext eines Nebenläufigkeitsmodells eine strukturelle Grundlage für ein Modell für eigentliche Nebenläufigkeit zu erarbeiten. Daran schließt sich in Abschnitt 4 die formale Definition des eigentlichen Nebenläufigkeitsmodells an. Indem man dieses Modell in anderen Nebenläufigkeitsmodellen wiederzufinden versucht, kann man analysieren, inwiefern die Modellierung der eigentlichen Nebenläufigkeit im einzelnen Fall durch modellspezifische Strukturen angereichert wird. Die sich daraus ergebenden Resultate sollten Aufschluß über den Standpunkt eines Nebenläufigkeitsmodells innerhalb einer vereinheitlichten Theorie der Nebenläufigkeit geben.

In den Abschnitten 5 und 7 wird die Beziehung zwischen zwei Netzmodellen für Nebenläufigkeit und dem eigentlichen Nebenläufigkeitsmodell aufgezeigt. - ein Vorgang, der mathematisch wie semantisch nicht trivial ist. Das Ergebnis ist

die Definition der einem Netz unterliegenden eigentlichen Nebenläufigkeitsstruktur, die genau das Systemverhalten des Netzes angibt.

Neben modellspezifischen Eigenschaften besitzt ein in einem Nebenläufigkeitsmodell dargestelltes System auch Eigenschaften, die nur von der eigentlichen Nebenläufigkeitsstruktur des Systems abhängen. Eine solche Eigenschaft die Determiniertheit, wird in Abschnitt 8 auf der Grundlage des eigentlichen Nebenläufigkeitsmodells formalisiert und an einem Netzmodell für Nebenläufigkeit genauer untersucht.

Abschnitt 6 beinhaltet die Charakterisierung der durch ein Netzmodell für Nebenläufigkeit darstellbaren Arten von Systemverhalten.

Abschnitt 2 enthält mathematische Preliminarien aus Topologie und Mengenlehre (Quasiordnungen).

2. Mathematische Preliminarien

2.1 Topologische Preliminarien

In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse aus der Topologie zusammengestellt, die selten Erwähnung finden, für das Verständnis der folgenden Überlegungen jedoch von Wichtigkeit sind.

2.1.1 Def.: $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ sei Familie topologischer Räume, X Menge.

$f_i: X \rightarrow X_i$ seien Abbildungen. Die größte Topologie auf X , bezüglich der alle f_i stetig sind, heißt INITIALE TOPOLOGIE von X bezüglich $(X_i, f_i)_{i \in I}$.

2.1.2 Def.: $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ sei Familie topologischer Räume, X Menge.

$p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ sei die i -te Projektion. Die initiale Topologie von $\prod_{i \in I} X_i$ bezüglich $(X_i, p_i)_{i \in I}$ heißt PRODUKTTOPOLOGIE und wird mit $\prod_{i \in I} \tau_i$ bezeichnet.

2.1.3 Lemma: $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ sei Familie topologischer Räume, X Menge.

$f_i: X \rightarrow X_i$ seien Abbildungen. τ sei die initiale Topologie von X bezüglich $(X_i, f_i)_{i \in I}$. Dann gilt für jeden Filter F auf X : F konvergiert gegen $x \in X$ in τ genau dann, wenn für alle $i \in I$ der Filter $f_i(F)$ auf X_i gegen $f_i(x)$ in τ_i konvergiert.

Bem. zum Bew.: Das Lemma wird im allgemeinen nur über die Produkttopologie $\prod_{i \in I} \tau_i$ auf $\prod_{i \in I} X_i$ ausgesprochen. Eine Verallgemeinerung auf beliebige initiale Topologien ist jedoch zulässig, da zum Beweis keine speziellen Eigenschaften des Produktraumes oder der Projektionen benutzt werden.

2.1.4 Bem.: X_1 und X_2 seien Topologien auf einer Menge X .

Dann ist das Supremum $\sup(X_1, X_2)$ von X_1 und X_2 im Verband der Topologien auf X die initiale Topologie bezüglich $((X, X_i), \text{id}_i)_{i \in \{1, 2\}}$ mit $\text{id}_i: X \rightarrow (X, X_i)$.

2.1.5 Def.: a) $(L, \leq)$ sei geordnete Menge. L heißt GERICHTET, wenn gilt:

$$\lambda, \mu \in L \quad \rho \in L \quad \lambda \leq \rho \wedge \mu \leq \rho.$$

b) (X, X) sei topologischer Raum. Eine Familie $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ von Elementen aus X heißt MOORE-SMITH FOLGE auf X , falls L gerichtet ist.

c) (X, X) sei topologischer Raum. F sei Filter auf X . Jede Moore-Smith Folge $(x_s)_{s \in F}$ mit $x_s \in s$ heißt F ZUGEORDNET.

F ist hierbei durch die Mengeninklusion geordnet.

d) (X, X) sei topologischer Raum. $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ sei Moore-Smith Folge auf X . Dann heißt der Filter $F := \{F \mid \bigvee_{\lambda \in L} F \supset \{x_\mu \mid \mu \geq \lambda\}\}$ der ELEMENTARFILTER der Moore-Smith Folge $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.

e) (X, X) sei topologischer Raum. Die Moore-Smith Folge $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ KONVERGIERT gegen $x \in X$, wenn gilt:

$$(x_\lambda)_{\lambda \in L} \xrightarrow{X} x : \Leftrightarrow \bigcup_{U \in U(X)} \bigvee_{\lambda \in L} \bigwedge_{\mu \geq \lambda} x_\mu \in U.$$

2.1.6 Lemma: (X, X) sei topologischer Raum. Dann gilt:

a) Die Moore-Smith Folge $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn ihr Elementarfilter gegen x konvergiert.

b) ein Filter F konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn jede ihm zugeordnete Moore-Smith Folge gegen x konvergiert.

Bew.: a) trivial.

b) " $\Rightarrow$ ": trivial.

" $\Leftarrow$ ": Konvergiere F nicht gegen $x \in X$. Dann existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$, sodaß für alle $S \in F$ gilt, daß $S \cap U \neq \emptyset$.

Sei $x_S \in S \cap U$. $(x_S)_{S \in F}$ ist F zugeordnete Moore-Smith Folge, konvergiert aber nicht gegen x , denn es existiert kein $S \in F$ mit $x_S \in U$.

2.1.7 Def.: (X, X) sei topologischer Raum. π sei Äquivalenzrelation auf X . Der ABSCHLUSS $\bar{\pi}$ von π in (X, X) ist der Abschluß von π in der Produkttopologie $X \times X$ von $((X, X))_{i \in \{1, 2\}}$.

2.1.8 Lemma: (X, X) sei topologischer Raum. π sei Äquivalenzrelation auf X . Dann gilt:

a) $\bar{\pi}$ ist Äquivalenzrelation.

b) Für alle $x \in X$ ist $[x]_{\bar{\pi}}$ abgeschlossen in X .

Bew.: a) Nach Definition von $\bar{\pi}$ gilt für alle $x, y \in X$:

$$x \bar{\pi} y \iff (x_{\lambda})_{\lambda \in L} \in \bigvee_{\lambda \in L} (x_{\lambda})_{\lambda \in L} \bar{\pi} x \wedge (y_{\lambda})_{\lambda \in L} \in \bar{\pi} y \wedge \bigwedge_{\lambda \in L} x_{\lambda} \pi y_{\lambda}$$

Damit übertragen sich die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation von π auf $\bar{\pi}$.

b) Sei $x \in X$ und $y \in \overline{[x]_{\bar{\pi}}}$. Sei ferner $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$. Es existiert ein $z \in V$ mit $z \in [x]_{\bar{\pi}}$, da y Berührungspunkt von $[x]_{\bar{\pi}}$ ist, und es gilt $(x, z) \in U \times V$. Somit ist in jeder Umgebung von (x, y) ein Paar $(x, z) \in \bar{\pi}$ enthalten. Als Berührungspunkt von $\bar{\pi}$ ist (x, y) also aufgrund der Abgeschlossenheit von $\bar{\pi}$ in $\bar{\pi}$ enthalten. Damit gilt $y \in [x]_{\bar{\pi}}$.

2.2 Geordnete Mengen

In den folgenden Abschnitten werden Überlegungen von Bedeutung sein, die sich mit der Aufschreibung einer geordneten Menge in einer Folge beschäftigen. Die dazu notwendigen Grundkonzepte sollen hier eingeführt und benötigte Resultate erarbeitet werden.

Sei dazu X eine Menge.

2.2.1 Def.: Eine Folge $E \in P(X)^{\mathbb{N}}$ heißt AUFSCHREIBUNG von X , wenn gilt:

- a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(n) = X$
- b) $E(n) \cap E(k) = \emptyset \Rightarrow n=k$ für $n, k \in \mathbb{N}$.

Die Menge der Aufschreibungen von X wird mit A_X oder A bezeichnet.

Für eine Aufschreibung $E \in A$ gilt nicht notwendig $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E(n) = \emptyset$.

2.2.2 Def.: Eine Aufschreibung $E \in A$ induziert eine Abbildung $i_E: X \rightarrow \mathbb{N}$ mit $i_E(x) := k$, wobei $x \in E(k)$.

2.2.3 Def.: Sei $E \in A$.

- a) Die Relation $<_E$ auf X wird definiert durch:
 $x <_E y \Leftrightarrow i_E(x) < i_E(y)$ für $x, y \in X$.
- b) Die Relation $\leq_E$ ist die reflexive Hülle von $<_E$:
 $x \leq_E y \Leftrightarrow x <_E y \vee x = y$ für $x, y \in X$.

2.2.4 Bem.: a) $\leq_E$ ist Ordnungsrelation. Beweis:

- i) Reflexivität: trivial.
- ii) Transitivität: trivial.
- iii) Antisymmetrie: $E \in A$.
- b) i_E ist bezüglich $\leq_E$ isoton.

2.2.5 Def.: Die Relation λ_X (oder in eindeutigen Fällen λ) auf A_X wird definiert durch:

$$E \lambda_X E' : \Leftrightarrow \leq_E \supset \leq_{E'}, \quad \text{für } E, E' \in A_X.$$

E heißt feiner als E' , wenn $E \lambda E'$ gilt.

λ ist reflexiv und transitiv. $E \lambda E'$ bedeutet, daß X in E "differenzierter" aufgeschrieben ist, als in E' .

2.2.6 Def.: Sei $K \subset A$. Die Ordnungsrelation $\leq_K$ wird definiert durch: $\leq_K := \bigcap_{E \in K} \leq_E$.

Im folgenden sei $(X, \leq)$ geordnete Menge.

2.2.7 Def.: $E \in A_X$ heißt SEQUENTIALISIERUNG von $(X, \leq)$ wenn gilt: $\leq \subset \leq_E$. Die Menge der Sequentialisierungen von $(X, \leq)$ wird mit $L(X, \leq)$ oder $L(\leq)$ bezeichnet.

2.2.8 Bem.: a) Eine Sequentialisierung ist eine Aufschreibung, die $\leq$ respektiert.

b) Es gibt geordnete Mengen, die keine Sequentialisierungen besitzen (z.B. $(\mathbb{R}, \leq)$; $(X, \leq)$, falls X überabzählbar und $\leq$ totale Ordnung ist).

c) Offenbar gilt für $\leq_K$ (Def. 2.2.6) $K \subset L(\leq_K)$.

Im folgenden wird eine Charakterisierung der geordneten Mengen angegeben, die Sequentialisierungen besitzen.

2.2.9 Def.: a) Sei $x \in X$. Die HÖHE von x in $\leq$ wird definiert als: $h_{\leq}(x) := \sup\{|A| \mid A \subset X, A \text{ totalgeordnet}, x \in A\}$.

b) Seien $x, y \in X$ und gelte $x \leq y$. Die HÖHENDIFFERENZ von y zu x in $\leq$ wird definiert als:

$$d_{\leq}(x, y) := \sup\{|A| \mid A \subset X, A \text{ totalgeordnet}, x \leq A < y\}.$$

(In eindeutigen Fällen unterbleibt die Indizierung mit dem Ordnungssymbol)

2.2.10 Def.: Eine Ordnung $\leq$ auf X heißt TREPPENORDNUNG, wenn gilt: $\bigwedge_{x \in X} h(x) < \infty$.

2.2.11 Lemma: Sei $\leq$ Treppenordnung auf X . Dann gilt:

- a) $\bigwedge_{x \in X} d(x, x) = 0$
- b) $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ ist isoton
- c) $x \leq y \Rightarrow h(y) \geq h(x) + d(x, y)$
- d) $x \leq y \leq z \Rightarrow d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$

Bew.: a) trivial.

b) Sei $x < y$. Sei $A \subset X$ endliche totalgeordnete Menge und gelte $A < x$ sowie $|A| = h(x)$. Eine solche Menge A existiert, da $h(x)$ endlich ist. $A' := A \cup \{x\}$ ist totalgeordnet und es gilt $A' < y$. Daraus folgt:
 $h(x) < |A'| \leq h(y)$.

c) Sei $A \subset X$ endliche totalgeordnete Menge und gelte $A < x$ sowie $|A| = h(x)$. Ferner sei $B \subset X$ endliche totalgeordnete Menge mit $x \leq B < y$ und $|B| = d(x, y)$. Eine solche Menge existiert aufgrund der endlichen Höhe von y . Dann ist $A \cup B$ totalgeordnet und $A \cup B < y$. Da $A \cap B = \emptyset$ ist, gilt $h(y) \geq |A \cup B| = |A| + |B| = h(x) + d(x, y)$.

d) beweist man analog zu c).

Die Charakterisierung der Ordnungen, die Sequentialisierungen besitzen, gibt der folgende Satz.

2.2.12 Satz: $(X, \leq)$ besitzt Sequentialisierungen $\Leftrightarrow \leq$ ist Treppenordnung auf X .

Bew.: " $\Rightarrow$ ": Sei $A \subset X$ totalgeordnet und $A < x$. Sei $E \in L(\leq)$ und $i_E(x) = n$. Dann gilt $|A| \leq n$. Denn andernfalls wäre $a_1 < \dots < a_{n+1} < x$ mit $a_i \in A$ für $i \leq n+1$. Da $E \in L(\leq)$ gilt, wäre damit $a_1 <_E \dots <_E a_{n+1} <_E x$, also
 $0 \leq i_E(a_1) < \dots < i_E(a_{n+1}) < i_E(x) = n$. Widerspruch!
" $\Leftarrow$ ": E wird definiert durch $E(n) := \{x \in X \mid h(x) = n\}$.
Wegen der Isotonie von h (2.2.11 a) ist $E \in L(\leq)$.

In dem Beweisteil " $\Rightarrow$ " wurde gezeigt, daß für Treppen-

ordnungen gilt $E \in L(\leq) \Rightarrow x \wedge_X i_E(x) \geq h(x)$.

Nun werden weitere Sätze über Sequentialisierungen bewiesen. Sei dazu im folgenden $(X, \leq)$ eine Menge mit Trep-
penordnung.

2.2.13 Lemma: $E \in L(\leq) \wedge E' \in A \wedge E' \lambda E \Rightarrow E' \in L(\leq)$.

Bew.: Für $x, y \in X$ gilt: $x \leq y \Rightarrow x \leq_{E'} y \Rightarrow x \leq_{E'} y$.

$L(\leq)$ ist also abgeschlossen gegenüber der Verfeinerung
von Aufschreibungen.

2.2.14 Def.: Die symmetrische transitive Hülle von $\lambda_X |_{L(\leq)^2}$
wird mit π_X (oder π) bezeichnet. Es gilt also für
 $E, E' \in L(\leq)$: $E \pi_X E' : \Leftrightarrow E_1, \dots, E_n \vee_{L(\leq)} E = E_1 \wedge E' = E_n$
 $\wedge \bigwedge_{i \leq n} E_i \lambda_X E_{i+1} \vee E_{i+1} \lambda_X E_i$.

Falls $E \pi E'$ gilt, beschreibt π einen gewissen Transfor-
mationsprozeß von E zu E' (oder umgekehrt), der inner-
halb der Menge $L(\leq)$ durchgeführt werden kann.

2.2.15 Def.: a) $x_1, x_2 \in X$ heißen BENACHBART in $(X, \leq)$, wenn gilt:

$$[x_1, x_2] = \{x_1, x_2\} \vee [x_2, x_1] = \{x_1, x_2\} \quad (x_1 \neq x_2).$$

b) $x_1, x_2 \in X$ heißen UNABHÄNGIG in $(X, \leq)$, wenn gilt:

$$[x_1, x_2] = \emptyset \wedge [x_2, x_1] = \emptyset \quad (x_1 \neq x_2).$$

2.2.16 Bem.: a) Gelte $\neg x_2 \leq x_1$ sowie $[x_1, x_2] \subset \{x_1, x_2\}$. Dann
sind x_1, x_2 benachbart oder unabhängig in $(X, \leq)$.

b) x_1, x_2 sind unabhängig in $(X, \leq) \Leftrightarrow \neg x_1 \leq x_2 \wedge$
 $\neg x_2 \leq x_1$.

2.2.17 Lemma: Für $x_1, x_2 \in X$ gelte $[x_1, x_2] \subset \{x_1, x_2\}$ ($\neg x_2 \leq x_1$). Dann

existiert für jede Sequentialisierung

$E = (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L(\leq)$ eine Sequentialisierung

$\tilde{E} = (\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L(\leq)$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\{x_1\} = \tilde{T}_k$,

$\{x_2\} = \tilde{T}_{k+1}$ und $E \pi \tilde{E}$.

Sind x_1, x_2 unabhängig in $(X, \leq)$, so läßt sich sogar $\tilde{T}_k = \{x_1, x_2\}$ in dieser Weise erreichen.

Bew.: Sei $E = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebige Sequentialisierung

von $(X, \leq)$. O.B.d.A. sei $\{x_1\} = T_j, \{x_2\} = T_k, j < k$.

(Sonst gilt (falls x_1 und x_2 unabhängig sind unter Umständen nach Vertauschen von x_1 und x_2).

$x_1 \in T_j, x_2 \in T_k, j \leq k$, und man betrachtet statt E die Sequentialisierung E' , die definiert ist durch:

$$E' := T_0, \dots, T_{j-1}, \{x_1\}, T_j - \{x_1, x_2\}, T_{j+1}, \dots \\ \dots, T_{k-1}, T_k - \{x_1, x_2\}, \{x_2\}, T_{k+1}, \dots$$

Es gilt $E \pi E'$.)

Für $j < i < k$ läßt sich die Menge T_i zerlegen in:

$$T_i^1 := \{t \in T_i \mid t > x_1\}$$

$$T_i^2 := \{t \in T_i \mid t < x_2\}$$

$$T_i^3 := \{t \in T_i \mid t \text{ ist unabhängig von } x_1 \text{ und } x_2\}.$$

Offenbar gilt $T_i^1 \cup T_i^2 \cup T_i^3 = T_i, (T_i^1 \cup T_i^2) \cap T_i^3 = \emptyset$.

Es gilt aber auch $T_i^1 \cap T_i^2 = \emptyset$, da aus $t \in T_i^1 \cap T_i^2$ im

Widerspruch zur Voraussetzung $\{x_1, t, x_2\} \subseteq \{x_1, x_2\}$ folgt.

Es wird nun gezeigt, daß für $\ell, m \in \mathbb{N}$ mit $j < \ell \leq m < k$ gilt: $t \in T_\ell^1 \wedge t' \in T_m^2 \cup T_m^3 \Rightarrow t, t'$ unabhängig.

Für $\ell = m$ ist diese Behauptung trivial, da $E \in L(\leq)$.

Sei also $\ell < m$: Aus t, t' abhängig in $(X, \leq)$ und $t \in T_\ell^1$

folgt dann $x_1 < t < t'$. Fallunterscheidung:

a) $t' \in T_m^2$: Es folgt $x_1 < t < t' < x_2$ im Widerspruch zu: $\{x_1, x_2\} \subseteq \{x_1, x_2\}$.

b) $t' \in T_m^3$: steht im Widerspruch zu: $x_1 < t'$.

Damit ist

$$\tilde{E} := T_0, \dots, T_{j-1}, T_{j+1}^2 \cup T_{j+1}^3, \dots, T_{k-1}^2 \cup T_{k-1}^3, \{x_1\}, \\ \{x_2\}, T_{j+1}^1, \dots, T_{k-1}^1, T_{k+1}, \dots$$

Sequentialisierung von $\leq$.

Es wird nun der Transformationsweg von E nach $\tilde{E}$ angegeben, der beweist, daß $E \pi \tilde{E}$ gilt:

$$E = T_0, \dots, T_{j-1}, \{x_1\}, T_{j+1}, T_{j+2}, \dots, T_{k-2}, T_{k-1}, \\ \{x_2\}, T_{k+1}, \dots$$

$$E_1 = T_0, \dots, T_{j-1}, \{x_1\}, T_{j+1}^2 \cup T_{j+1}^3, T_{j+1}^1, T_{j+2}^2 \cup T_{j+2}^3, \\ T_{j+2}^1, \dots, T_{k-2}^2 \cup T_{k-2}^3, T_{k-2}^1, T_{k-1}^2 \cup T_{k-1}^3, T_{k-1}^1, \\ \{x_2\}, T_{k+1}, \dots$$

$$E_2 = T_0, \dots, T_{j-1}, T_{j+1}^2 \cup T_{j+1}^3 \cup \{x_1\}, T_{j+2}^2 \cup T_{j+2}^3 \cup T_{j+1}^1, \dots \\ \dots, T_{k-1}^2 \cup T_{k-1}^3 \cup T_{k-2}^1, \{x_2\} \cup T_{k-1}^1, T_{k+1}, \dots$$

$$E_3 = T_0, \dots, T_{j-1}, T_{j+1}^2 \cup T_{j+1}^3, \{x_1\}, T_{j+2}^2 \cup T_{j+2}^3, T_{j+1}^1, \dots \\ \dots, T_{k-1}^2 \cup T_{k-1}^3, T_{k-2}^1, \{x_2\}, T_{k-1}^1, T_{k+1}, \dots$$

$\vdots$
 $\vdots$

Durch entsprechende Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man in $2(k-j-2)+1$ Schritten $\tilde{E}$. Dabei gilt

$$E_{n-1} \lambda E_n \text{ und } E_{n+1} \lambda E_n \text{ für gerade Indizes } n. \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} E_n \in L(\leq).$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung des Lemmas sei angenommen, daß x_1, x_2 unabhängig in $(X, \leq)$ sind.

Nach dem ersten Teil des Lemmas existiert $\tilde{E}$ mit $\tilde{E}(j) = \{x_1\}$, $\tilde{E}(j+1) = \{x_2\}$. Sei E' definiert durch:

$$E'(n) := \begin{cases} \tilde{E}(n) & n < j \\ \{x_1, x_2\} & n = j \\ \tilde{E}(n+1) & n > j \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{E} \lambda E'$ sowie $E' \in L(\leq)$. Damit ist alles bewiesen.

2.2.18 Satz: Es gilt: $\leq = \leq_{L(\leq)}$ für alle Mängen mit Treppennordnung.

Bew.: Nach Definition von $\leq_{L(\leq)}$ (2.2.6) gilt offenbar

$$\leq \leq \leq_{L(\leq)}.$$

Seien also x, y unabhängig in $\leq$.

Dann existiert nach Lemma 2.2.17 eine Sequentialisierung $E \in L(\leq)$ mit $i_E(x) = i_E(y)$. Also gilt: x, y unabhängig in $\leq_{L(\leq)}$.

2.3 Quasiordnungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse von 2.2 auf Quasiordnungen, d.h. reflexive transitive Relationen, die aber nicht antisymmetrisch sein müssen, erweitert. Eine Quasiordnung wird dabei als eine Überlagerung einer Äquivalenzrelation mit einer Ordnungsrelation angesehen. Diese Betrachtungsweise liefert die Grundlage für die semantische Deutung einer Quasiordnung als Kausalitätsrelation. Mit einer solchen Deutung werden die Quasiordnungen in den folgenden Abschnitten als fundamentale Struktur bei der Formalisierung der eigentlichen Nebenläufigkeit auftreten.

Sei im folgenden (X, τ) eine Menge mit einer Quasiordnung.

2.3.1 Def.: a) Die größte symmetrische Relation $EQ(\tau)$, die in τ enthalten ist,

$$EQ(\tau) := \{(x, y) \mid x \times y \wedge y \times x\}$$

heißt der ÄQUIVALENZKERN von τ .

b) Das Komplement von $EQ(\tau)$ bezüglich τ heißt der (STRENGE) ORDNUNGSKERN von τ :

$$SOR(\tau) := \tau - EQ(\tau).$$

2.3.2 Bem.: a) $EQ(\tau)$ ist Äquivalenzrelation, also die feinste in τ enthaltene Äquivalenzrelation. Deshalb wird $EQ(\tau)$ auch manchmal die τ UNTERLIEGENDE ÄQUIVALENZ-RELATION genannt.

b) $SOR(\tau)$ ist transitiv und antisymmetrisch.

$$OR(\tau) := SOR(\tau) \cup \Delta_X \text{ ist also Ordnungsrelation und}$$

heißt die τ UNTERLIEGENDE ORDNUNGSRELATION.

c) Es gilt für $x, y, z \in X$: $x \times EQ(\tau) z \wedge x \times \tau y \Rightarrow x \times EQ(\tau) y \times EQ(\tau) z$.

d) τ ist Ordnung $\Leftrightarrow OR(\tau) = \tau \Leftrightarrow EQ(\tau) = \Delta_X$.

e) τ ist Äquivalenzrelation $\Leftrightarrow EQ(\tau) = \tau \Leftrightarrow$

$$OR(\tau) = \Delta_X \Leftrightarrow SOR(\tau) = \emptyset.$$

2.3.3 Def.: Sei $E \in A_X$. Die Relation τ_E auf X wird definiert durch:

$$x \tau_E y \Leftrightarrow i_E(x) \leq i_E(y) \quad \text{für } x, y \in X.$$

2.3.4 Bem.: Es gilt $\leq_E = \text{OR}(\tau_E)$ sowie $<_E = \text{SOR}(\tau_E)$.

2.3.5 Def.: $E \in A_X$ heißt SEQUENTIALISIERUNG von (X, τ) , wenn gilt: $\text{EQ}(\tau) \subset \text{EQ}(\tau_E) \wedge \text{SOR}(\tau) \subset \text{SOR}(\tau_E)$.

Die Menge der Sequentialisierungen von (X, τ) wird mit $L(X, \tau)$ oder $L(\tau)$ bezeichnet.

Für Ordnungen stimmt Def. 2.3.5 mit Def. 2.2.7 überein.

2.3.6 Lemma: Für $E \in A$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- a) $E \in L(X, \tau)$
- b) $\text{EQ}(\tau) \subset \text{EQ}(\tau_E) \wedge \text{OR}(\tau) \subset \text{OR}(\tau_E)$
- c) $\tau \subset \tau_E \wedge \text{OR}(\tau) \subset \text{OR}(\tau_E)$

Bew.: $a \Leftrightarrow b$: trivial.

$$a \Rightarrow c: \tau = \text{EQ}(\tau) \cup \text{OR}(\tau) \subset \text{EQ}(\tau_E) \cup \text{OR}(\tau_E) = \tau_E.$$

$$c \Rightarrow a: x \text{ EQ}(\tau) y \Rightarrow x \tau y \wedge y \tau x \Rightarrow x \tau_E y \wedge y \tau_E x \\ \Rightarrow x \text{ EQ}(\tau_E) y.$$

2.3.7 Def.: τ_1, τ_2 seien Quasiordnungen auf X . τ_1 heißt GRÖßER als τ_2 , wenn gilt:

$$\tau_1 \neq \tau_2 \Leftrightarrow \text{EQ}(\tau_1) \subset \text{EQ}(\tau_2) \wedge \text{OR}(\tau_1) \subset \text{OR}(\tau_2) \\ (\Leftrightarrow \text{EQ}(\tau_1) \subset \text{EQ}(\tau_2) \wedge \text{SOR}(\tau_1) \subset \text{SOR}(\tau_2)).$$

Ist τ_2 Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation, so gilt $\tau_1 \neq \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2$.

2.3.8 Def.: Sei $K \in A_X$. Die Quasiordnung τ_K wird definiert durch:

$$\tau_K^\sigma := \bigcap_{E \in K} EQ(\tau_E)$$

$$\tau_K^\alpha := \bigcap_{E \in K} SOR(\tau_E)$$

$$\tau_K := \tau_K^\sigma \cup \tau_K^\alpha.$$

2.3.9 Bem.: a) Es gilt $\tau_K^\sigma = EQ(\tau_K)$, $\tau_K^\alpha = SOR(\tau_K)$.

b) τ_K ist die feinste Relation τ , für die gilt:

$$\bigwedge_{E \in K} \tau \subseteq \tau_E.$$

c) Es gilt $K \subseteq L(\tau_K)$.

d) Es gilt $OR(\tau_K) \subseteq K$.

2.3.10 Def.: Die Relation τ induziert auf $X/EQ(\tau)$ eine Ordnungsrelation $\leq_\tau$, die wie folgt definiert wird:

$$[x]_{EQ(\tau)} \leq_\tau [y]_{EQ(\tau)} : \Leftrightarrow \bigwedge_{u \in [x]_{EQ(\tau)}} \bigvee_{v \in [y]_{EQ(\tau)}} u \tau v$$

$$(\Leftrightarrow \bigvee_{u \in [x]_{EQ(\tau)}} \bigwedge_{v \in [y]_{EQ(\tau)}} u \tau v) \text{ für } x, y \in X.$$

In Analogie zum Vorgehen in 2.2 werden zunächst die Quasiordnungen charakterisiert, die Sequentialisierungen besitzen.

2.3.11 Satz: (X, τ) besitzt Sequentialisierungen $\Leftrightarrow$

$(X/EQ(\tau), \leq_\tau)$ besitzt Sequentialisierungen.

Besitzt (X, τ) Sequentialisierungen, so ist die Abbildung $j: L(X, \tau) \rightarrow L(X/EQ(\tau), \leq_\tau)$ mit

$$j(E) := (\{K \subseteq X/EQ(\tau) \mid K \cap F(n) \neq \emptyset\}_{n \in \mathbb{N}}) \text{ für } E \in L(X, \tau)$$

bijektiv.

Bew.: " $\Rightarrow$ ": Besitze (X, τ) Sequentialisierungen. Sei

$E \in L(X, \tau)$. Es wird gezeigt, daß $j(E) \in L(X/EQ(\tau), \leq_\tau)$

gilt: Da $EQ(\tau) \subseteq EQ(\tau_E)$ ist, gilt für alle $K \in X/EQ(\tau)$

und alle $n \in \mathbb{N}$: $K \cap E(n) \neq \emptyset \Leftrightarrow K \subseteq E(n)$. Deshalb gilt

$$j(E) \in A_{X/EQ(\tau)}.$$

Sei nun für $x, y \in X$ $[x]_{EQ(\tau)} <_\tau [y]_{EQ(\tau)}$.

Dann gilt $i_{j(E)}([x]_{EQ(\tau)}) = i_E(x) < i_E(y) = i_{j(E)}([y]_{EQ(\tau)})$.

" $\leq$ ": Sei $E' \in L(X/EQ(\tau), \leq_\tau)$. Sei E definiert durch $E(n) := UE'(n)$. Dann gilt:

a) $EQ(\tau) \subset EQ(\tau_E)$: trivial.

b) $SOR(\tau) \subset SOR(\tau_E)$:

Sei $x \text{ SOR}(\tau) y$. Dann gilt $[x]_{EQ(\tau)} \leq_\tau [y]_{EQ(\tau)}$.

Also gilt $i_E(x) = i_E([x]_{EQ(\tau)}) < i_E([y]_{EQ(\tau)}) = i_E(y)$.

Besitzt (X, τ) Sequentialisierungen, so ist die Abbildung $j': L(X/EQ(\tau), \leq_\tau) \rightarrow L(X, \tau)$ mit

$j'(E')_n := UE'(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $E' \in L(X/EQ(\tau), \leq_\tau)$ Inverse zu j .

Aufgrund von 2.3.11 lassen sich die Sätze aus 2.2 über Treppenanordnungen auf Quasiordnungen verallgemeinern. Besitze dazu im folgenden (X, τ) Sequentialisierungen.

2.3.12 Def.: Die symmetrische transitive Hülle der Relation

$\lambda_X|_{L(\tau)^2}$ wird mit π_X (oder π) bezeichnet. Es gilt also für $E, E' \in L(\tau)$: $E \pi_X E' : \Leftrightarrow$

$$E_1, \dots, E_n \in L(\tau) \quad E = E_1 \wedge E' = E_n \wedge \bigwedge_{i \leq n} E_i \lambda_X E_{i+1} \\ \vee E_{i+1} \lambda_X E_i.$$

Falls τ Ordnung ist, stimmt 2.3.12 mit 2.2.14 überein.

2.3.13 Lemma: Für $E, E' \in L(\tau)$ gilt:

$$E \pi_X E' \Leftrightarrow j(E) \pi_{X/EQ(\tau)} j(E').$$

Bew.: Nach Definition der Abbildung j (2.3.11) gilt:

$$E \lambda_X|_{L(\tau)^2} E' \Leftrightarrow j(E) \lambda_{X/EQ(\tau)}|_{L(\leq_\tau)^2} j(E').$$

2.3.14 Def.: a) $x_1, x_2 \in X$ heißen BENACHBART in (X, τ) , wenn

gilt: $[x_1]_{EQ(\tau)}, [x_2]_{EQ(\tau)}$ sind benachbart in $(X/EQ(\tau), \leq_\tau)$.

b) $x_1, x_2 \in X$ heißen UNABHÄNGIG in (X, τ) , wenn gilt:

$[x_1]_{EQ(\tau)}, [x_2]_{EQ(\tau)}$ sind unabhängig in $(X/EQ(\tau), \leq_\tau)$

2.3.15 Bem.: x_1, x_2 unabhängig in $(X, \tau) \Leftrightarrow \tau_{x_1} \tau_{x_2} \wedge \tau_{x_2} \tau_{x_1}$.

2.3.16 Lemma: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $\tau_{x_2} \tau_{x_1}$ und $[[x_1]_{EQ(\tau)}, [x_2]_{EQ(\tau)}] \subset$

$\{[x_1]_{EQ(\tau)}, [x_2]_{EQ(\tau)}\}$. (Es gilt also nach 2.2.16

x_1, x_2 benachbart oder unabhängig in (X, τ)). Dann existiert für jede Sequentialisierung $E = (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L(\tau)$

eine Sequentialisierung $\tilde{E} = (\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L(\tau)$ und ein

$k \in \mathbb{N}$ mit $[x_1]_{EQ(\tau)} = \tilde{T}_k$ und $[x_2]_{EQ(\tau)} = \tilde{T}_{k+1}$, für

die gilt $E \pi \tilde{E}$.

Sind x_1, x_2 unabhängig in (X, τ) , so läßt sich sogar

$\tilde{T}_k = [x_1]_{EQ(\tau)} \cup [x_2]_{EQ(\tau)}$ in dieser Weise erreichen.

Bew.: Anwendung der Abbildung j auf $E, \tilde{E}$ in Lemma 2.2.17 und Anwendung von Lemma 2.3.13.

2.3.17 Satz: (X, τ) besitze Sequentialisierungen. Dann gilt:

$$\tau = \tau_{L(\tau)}.$$

Bew.: Offenbar gilt $\tau \subset \tau_{L(\tau)}$. Sei also $\tau_{x\tau y}$ mit $x, y \in X$.

Fallunterscheidung:

a) Es gelte $y \tau x$. Dann gilt $y \text{ SOR}(\tau) x$. Für alle $E \in L(\tau)$ gilt $y \text{ SOR}(\tau_E) x$ und damit gilt

$y \text{ SOR}(\tau_{L(\tau)}) x$ nach Definition von $\tau_{L(\tau)}$, also

$$\tau_{x\tau_{L(\tau)} y}.$$

b) Es gelte $\tau_{y\tau x}$. Dann sind nach 2.3.15 b) x, y unabhängig in (X, τ) . Nach Lemma 2.3.16 existiert $E \in L(\tau)$ mit $E(n) = [x]_{EQ(\tau)} \cup [y]_{EQ(\tau)}$. E' und E''

definiert durch:

$$E' := E(0), \dots, E(n-1), [x]_{EQ(\tau)}, [y]_{EQ(\tau)}, E(n+1), \dots$$

$$E'' := E(0), \dots, E(n-1), [y]_{EQ(\tau)}, [x]_{EQ(\tau)}, E(n+1), \dots$$

Dann sind aufgrund der Unabhängigkeit von x, y auch E' und E'' Sequentialisierungen von (X, τ) .

Damit gilt $\tau_{x\tau_{L(\tau)} y} \wedge \tau_{y\tau_{L(\tau)} x}$.

2.3.18 Lemma: τ_1, τ_2 seien Quasiordnungen auf X , sodaß (X, τ_1) ,

(X, τ_2) Sequentialisierungen besitzen. Dann gilt: $\tau_1 + \tau_2 \Leftrightarrow L(\tau_1) \supset L(\tau_2)$.

Bew.: " $\Rightarrow$ ": $E \in L(\tau_2) \Rightarrow EQ(\tau_2) \subset EQ(\tau_E) \wedge SOR(\tau_2) \subset SOR(\tau_E)$

$\Rightarrow EQ(\tau_1) \subset EQ(\tau_E) \wedge SOR(\tau_1) \subset SOR(\tau_E) \Rightarrow E \in L(\tau_1)$.

" $\Leftarrow$ ": $x \in EQ(\tau_1) \wedge y \in EQ(\tau_E) \Rightarrow x \in EQ(\tau_1) \wedge y \in EQ(\tau_E) \Rightarrow$

$x \in EQ(\tau_1) \wedge y \in EQ(\tau_E) \Rightarrow x \in EQ(\tau_1) \wedge y \in EQ(\tau_E) \Rightarrow x \in EQ(\tau_1) \wedge y \in EQ(\tau_E)$

Analog beweist man $SOR(\tau_1) \subset SOR(\tau_2)$.

2.3.19 Def.: $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ seien quasigeordnete Mengen. (X_1, τ_1) heißt PRÄFIX von (X_2, τ_2) (geschrieben $(X_1, \tau_1) < (X_2, \tau_2)$), wenn gilt:

a) $X_1 \subset X_2$

b) $\tau_1 = \tau_2|_{X_1}$

c) $x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge x_2 \tau_2 x_1 \Rightarrow x_2 \in X_1$.

2.3.20 Bem.: Es gilt $(X_1, \tau_1) < (X_2, \tau_2) \Leftrightarrow (X_1/EQ(\tau_1), \leq_{\tau_1}) < (X_2/EQ(\tau_2), \leq_{\tau_2})$. Somit ist Def. 2.3.19 eine Erweiterung von Def. 2.2.20, die eine Ordnung auf der Klasse aller quasigeordneten Mengen.

3. Zur Semantik von Nebenläufigkeitsmodellen

Der in der Einleitung dargelegte Anspruch eines diskreten Modells für eigentliche Nebenläufigkeit, die Gemeinsamkeiten möglichst vieler diskreter Nebenläufigkeitsmodelle zu beschreiben, erfordert es, so viele Nebenläufigkeitsmodelle wie möglich in die Deduktion des Modells für eigentliche Nebenläufigkeit mit einzu beziehen. Da dies aber technisch kaum durchführbar ist, beschränke ich mich bei der Deduktion meines Vorschlages für ein Modell für eigentliche Nebenläufigkeit auf die Betrachtung lediglich einer Teilklasse von Nebenläufigkeitsmodellen, nämlich die der Petri-Netze (mit zwei verschiedenen Schaltregeln). Ich meine, daß diese Beschränkung nicht allzu schwer wiegende Konsequenzen hat. Die Petri-Netze haben in der letzten Zeit eine Art "zentraler Rolle" unter den Nebenläufigkeitsmodellen eingenommen. Ableitbarkeiten anderer Nebenläufigkeitsmodelle aus Netzmodellen sind, wenn nicht sogar explizit gegeben, oft leicht herzustellen. Auf der anderen Seite besitzen die (insbesondere unsicheren) Netze eine solche formale Vielseitigkeit, daß das Erzielen von allen Netzen gemeinsamen semantischen Strukturen zu Erkenntnissen führen müßte, die in einfacher Weise auch auf viele andere Nebenläufigkeitsmodelle übertragen werden können.

In dieser Arbeit werden Netze in zwei Versionen betrachtet, die zunächst formal eingeführt werden.

3.1 Strenge Netze ⁴⁾

In diesem Abschnitt wird das Nebenläufigkeitsmodell der strengen Netze eingeführt, das eine geringfügige Erweiterung des von C.A. Petri in [Pet61] vorgestellten Netzmodells zur Beschreibung von Nebenläufigkeitsproblemen darstellt.

⁴⁾ Dieses Modell lernte ich im Dezember 1974 in einem Gespräch mit Dr. Petri kennen.

In dem Modell der strengen Netze wird ein System dargestellt durch:

- a) Eine Menge von elementaren Systemkomponenten (Transitionen)
- b) Eine Menge von elementaren Bedingungen (Stellen).

Ferner enthält das Netzmodell Strukturkomponenten, die die Beziehungen zwischen elementaren Systemkomponenten und elementaren Bedingungen angeben:

- c) Eine Relation, die angibt, ob eine Bedingung Eingangsbedingung für eine Systemkomponente ist
- d) Eine Relation, die angibt, ob eine Bedingung Ausgangsbedingung für eine Systemkomponente ist.

3.1.1 Def.: Ein STRENGES NETZ $N = (\Sigma, \Pi, F, B)$ besteht aus:

- a) Einer Menge Σ von TRANSITIONEN (transitions)
- b) Einer Menge Π von STELLEN (places)
- c) Einer Relation $F \subseteq \Pi \times \Sigma$ (VORWÄRTSRELATION)
- d) Einer Relation $B \subseteq \Pi \times \Sigma$ (RÜCKWÄRTSRELATION).

Man veranschaulicht sich ein Netz im allgemeinen, indem man die Transitionen als Quadrate ($\square$), die Stellen als Kreise ($\circ$) zeichnet und durch Pfeile ($\longrightarrow$) gemäß den Relationen F und B verbindet.

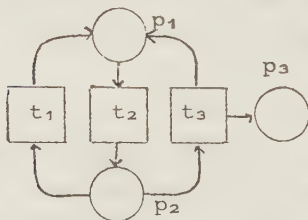
3.1.2 Beispiel: Das Netz $N = (\Sigma, \Pi, F, B)$ mit $\Sigma = \{t_1, t_2, t_3\}$,

$\Pi = \{p_1, p_2, p_3\}$,

$F = \{(p_1, t_2), (p_2, t_1), (p_2, t_3)\}$,

$B = \{(p_1, t_1), (p_1, t_3), (p_2, t_2), (p_3, t_3)\}$

wird durch den nebenstehenden Graphen veranschaulicht.

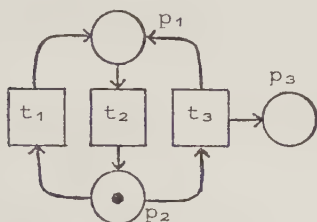


Ein Netz beschreibt statische Eigenschaften eines Systems, also Eigenschaften, die sich nicht in der Zeit ändern. Die folgenden Definitionen modellieren dynamische Systemeigenschaften.

3.1.3 Def.: N sei Netz mit der Stellenmenge Π . Eine Teilmenge $M \subseteq \Pi$ heißt MARKIERUNG von N . Eine Stelle $p \in \Pi$ heißt BELEGT (MARKIERT) bei M , wenn $p \in M$ gilt. Gilt $p \notin M$, so heißt p UNBELEGT (UNMARKIERT) bei M .

Man veranschaulicht eine Markierung im allgemeinen, indem man die markierten Stellen im Netzgraphen mit MARKEN, (CHIPS, TOKENS) belegt.

3.1.4 Beispiel: Die Markierung $M = \{p_2\}$ des in 3.1.2 definierten Netzes wird wie nebenstehend angegeben in den Netzgraphen eingetragen.



Belegte Stellen modellieren erfüllte Bedingungen; unbelegte Stellen entsprechen unerfüllten Bedingungen.

3.1.5 Def.: N sei Netz. $t_1, t_2 \in T$. t_1, t_2 heißen BENACHBART, wenn gilt:
 $\text{aff}(t_1, t_2) : \Leftrightarrow (F(t_1) \cup B(t_1)) \cap (F(t_2) \cup B(t_2)) \neq \emptyset$.

3.1.6 Def.: (SCHALTREGEL für strenge Netze) Man sagt:

a) $T \subseteq T$ ist AKTIVIERT bei $M \subseteq \Pi$, wenn gilt:

$$\text{act}(T, M) : \Leftrightarrow \bigwedge_{t_1, t_2 \in T} (\text{aff}(t_1, t_2) \Rightarrow t_1 = t_2) \wedge F(t_1) \subseteq M \wedge B(t_1) \subseteq \Pi - M$$

b) M GEHT DURCH SCHALTEN VON $T \subseteq T$ IN $M' \subseteq \Pi$ ÜBER, wenn gilt:

$$M[T > M'] : \Leftrightarrow \text{act}(T, M) \wedge M' = (M - F(T)) \cup B(T).$$

Die erste Bedingung für Aktiviertheit von Transitionenmengen hängt nur vom Netz ab und formalisiert die Vorstellung, daß Marken nicht geteilt werden können. Die zweite Bedingung ist eine Bedingung an M , die besagt, daß eine Transition nur dann schalten kann, wenn alle ihre Eingangsstellen belegt und alle ihre Ausgangsstellen unbelegt sind. Das bedeutet, daß eine System-

komponente genau dann eine elementare Aktion ausführen kann, wenn alle ihre Eingangsbedingungen und die Negationen aller ihrer Ausgangsbedingungen erfüllt sind.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem hier vorliegenden Netzmodell und den Petri-Netzen liegt in der Aktivierungsbedingung der Schaltregel $\text{act}(T, M)$.

Die hier verwandte Aktivierungsbedingung sichert, daß jede Stelle nur entweder belegt oder unbelegt ist, daß also mehrfache Belegungen einer Stelle, wie sie bei Petri-Netzen auftreten, ausgeschlossen sind. Damit lassen sich Stellen als Bedingungen interpretieren, ohne daß die Bedeutung einer "mehrfachen Gültigkeit" festgelegt werden muß. Die Abhängigkeit der Aktiviertheit einer Transition von der Belegung ihrer Ausgangsstellen impliziert ein Höchstmaß an Kontrolle, also ein Minimum an Willkür beim Schalten von Transitionen. Die Aktiviertheit einer Transition hängt von der gesamten Umgebung der Transition im Netz ab.

Daß $T \in \Sigma$ in der Schaltregel möglicherweise leer ist, hat lediglich technische Bewandtnis.

Man bedient sich oft einer an die lineare Algebra angelehnten Schreibweise, indem man $M \in \Pi$ als charakteristischer Vektor $M \in \{0, 1\}^{\Pi}$ und F und B als Matrizen $F, B \in \{0, 1\}^{\Pi \times \Sigma}$ sowie $T \in \Sigma$ als charakteristischen Transitionenvektor $T \in \{0, 1\}^{\Sigma}$ schreibt. Dann entspricht der Übergang von einer Markierung $M \in \Pi$ zu einer Markierung $M' \in \Pi$ einer (auf Matrizen über unendlichen Indexmengen) verallgemeinerten Matrizenmultiplikation unter Aktivierungsbedingung:

$$M[T > M' : \Leftrightarrow \text{act}(T, M) \wedge M' = M + (B - F)T.$$

$$(M' = M + (B - F)T \text{ bedeutet: } \bigwedge_{p \in \Pi} M'(p) = M(p) + \sum_{t \in \Sigma} (B(p, t) - F(p, t))T(t)$$

Die hierbei auftretenden Summanden sind nach Def. 3.1.6 für höchstens ein $t \in \Sigma$ ungleich Null, sodaß die Summe sinnvoll ist.)

Die Aktivierungsbedingung garantiert, daß $M' \in \Pi$ gilt.

3.1.7 Def.: N sei Netz, M sei Markierung von N . Dann heißt (N, M) markiertes Netz.

3.1.8 Def.: M, M' seien Markierungen eines Netzes N .

a) M' heißt VON M AUS ERREICHBAR, wenn gilt:

$$M \rightarrow M' : \Leftrightarrow \bigvee_{n \in N} \bigwedge_{i < n} M_i \leq \Pi \bigvee_{T_i \in \Sigma} M[(T_1, \dots, T_{n-1}) > M'].$$

hierbei bedeutet $M[(T_1, \dots, T_{n-1}) > M'$ dasselbe wie

$$M_1, \dots, M_n \leq \Pi \quad M = M_1 \wedge M' = M_n \wedge \bigwedge_{i < n} M_i [T_i > M_{i+1}].$$

b) $[M] := \{M' \mid M \rightarrow M'\}$ heißt die MARKIERUNGSKLASSE von M .

3.1.9 Def.: $E \in P(\Sigma)^N$ heißt SCHALTSEQUENZ von (N, M) , falls es für $n \in N$ $M_n \leq \Pi$ gibt mit $M[E_n] > M_n$.

Die Menge der Schaltsequenzen von (N, M) wird mit $S_{(N, M)}$ oder S_N oder S bezeichnet.

Ist $E \in S_{(N, M)}$, so wird die Markierung M_n , für die gilt $M[E_n] > M_n$, mit $M(E_n |)$ bezeichnet.

Ist $E \in S_{(N, M)}$ endlich (siehe 2.2.22), so wird die Markierung $M(E_n |)$, wobei für $k \geq n$ $E(k) = \emptyset$ gilt, mit $M(E)$ bezeichnet und heißt ENDEMARKIERUNG von E .

3.2 (Allgemeine) Petri-Netze

Das in diesem Abschnitt eingeführte Netzmodell tritt mit dem Namen "Petri-Netze" häufig in der Literatur auf ([Hac74], [Hac75], [Löh74] etc.).

3.2.1 Def.: Ein (ALLGEMEINES) PETRI-NETZ $N = (\Sigma, \Pi, F, B)$ besteht aus:

- a) Einer Menge Σ von TRANSITIONEN (transitions)
- b) Einer Menge Π von STELLEN (places)
- c) Einer Abbildung $F: \Pi \times \Sigma \rightarrow N$ (VORWÄRTSABBILDUNG)
- d) Einer Abbildung $B: \Pi \times \Sigma \rightarrow N$ (RÜCKWÄRTSABBILDUNG).

Dabei müssen $\sum_{t \in \Sigma} F(p, t)$ und $\sum_{t \in \Sigma} B(p, t)$ für alle $p \in \Pi$ existieren, d.h. nur endlich viele Summanden dürfen ungleich Null sein. (Meistens wird in der Literatur sogar verlangt, daß die Transitionen- und Stellenmenge endlich sind.)

In Anlehnung an die Schreibweise bei strengen Netzen wird die Menge der Eingangs- (Ausgangs-) Stellen einer Transition t $\{p \in \Pi \mid F(p, t) \neq 0\}$ ($\{p \in \Pi \mid B(p, t) \neq 0\}$) als $F(t)$ ($B(t)$) geschrieben.

3.2.2 Def.: N sei Petri-Netz mit Stellenmenge Π . Eine MARKIERUNG VON N ist eine Abbildung $M: \Pi \rightarrow \mathbb{N}$.

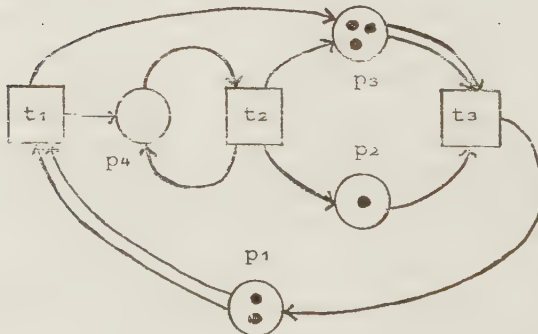
Man veranschaulicht ein Petri-Netz mit einer Markierung, indem man die Transitionen ($\square$) und die mit so vielen Marken ($\bullet$) belegten Stellen ($\bigcirc$) wie die Markierung angibt durch so viele Pfeile ($\longrightarrow$) verbindet, wie die Vorwärts- bzw. Rückwärtsabbildung angibt.

3.2.3 Beispiel: Ein Petri-Netz mit Markierung:

$$\Sigma := \{t_1, t_2, t_3\}; \quad \Pi := \{p_1, p_2, p_3, p_4\};$$

B	p_1	p_2	p_3	p_4	F	p_1	p_2	p_3	p_4
t_1	0	0	1	1	t_1	2	0	0	0
t_2	0	1	1	1	t_2	0	0	0	1
t_3	1	0	0	0	t_3	0	1	2	0

$$M := (2, 1, 3, 0)$$



3.2.4 Def.: (SCHALTREGEL für Petri-Netze) Man sagt:

a) $T \in \Sigma$ ist AKTIVIERT bei $M: \Pi \rightarrow N$, wenn gilt:

$$\text{act}(T, M) : \Leftrightarrow \bigwedge_{p \in \Pi} M(p) \leq \sum_{t \in T} F(p, t)$$

($\Leftrightarrow M \geq F \cdot T$, in symbolischer Schreibweise)

b) M GEHT DURCH SCHALTEN VON $T \in \Sigma$ IN $M': \Pi \rightarrow N$ ÜBER, wenn gilt:

$$M[T > M'] : \Leftrightarrow \text{act}(T, M) \wedge M' = M + (B - F)T$$

(in symbolischer Schreibweise).

Die Wohldefiniiertheit der in der Definition für Aktiviertheit bzw. Übergang durch Schalten auftretenden Summen (durch Endlichkeit der Menge der echten Summanden) ist durch die in 3.2.1 angegebene Endlichkeitsbedingung gesichert.

Auf der Basis dieser Definitionen werden die Definitionen 3.1.7, 3.1.8 und 3.1.9 auf Petri-Netze übertragen und im folgenden mitverwandt.

3.3 Zum Vergleich der beiden Netzmodelle

Ursprünglich betrachtete C.A. Petri Transitionennetze, die, obwohl sie nach der Schaltregel für allgemeine Petri-Netze schalten, sicher sind. Jede Stelle enthält also bei jeder Markierung höchstens ein Token. Eine geringe Zusatzeigenschaft sichert, daß solche Netze auch strenge Netze sind; die strenge und die allgemeine Schaltregel unterscheiden sich bei diesen Netzen nicht. Die in 3.1 und 3.2 vorgestellten Netzmodelle sind somit Erweiterungen der von Petri ursprünglich betrachteten Transitionennetze. Die Erweiterung, die zu den allgemeinen Petri-Netzen führt, besteht gerade darin, auf jeder Stelle mehr als eine Marke zuzulassen. Die Motivation für diese Erweiterung war sicher nicht semantischer sondern wahrscheinlich technischer Natur (Beispiel: Modellierung von Systemen durch FIFO-Speicher verbundener Rechner). Darüberhinaus

ignoriert sie die Deduktion der Transitionennetze als Nebenläufigkeitsmodell, da sie die universelle Interpretation der Stelle als Bedingung nicht mehr zuläßt. Damit wird dem Netzkonzept einiges von seiner semantischen Stringenz als Nebenläufigkeitsmodell entrissen. Dies hat, so geringfügig die Erweiterung des Netzmodells durch die Möglichkeit mehrerer Marken auf einer Stelle zu sein scheint, weitreichende Konsequenzen.

Ich vertrete nicht die Ansicht, daß deshalb die allgemeinen Petri-Netze als Nebenläufigkeitsmodell abgelehnt werden sollten. Jedoch scheint es so, als modellierten sie Nebenläufigkeit in irgendeinem Sinne "schlechter" als strenge Netze. Auch die Ergebnisse dieser Arbeit stehen im Einklang mit der anschaulichen Vorstellung, daß ein unsicheres Netz im allgemeinen die Nebenläufigkeitsstruktur eines Systems nicht so "gründlich" wiedergibt wie ein strenges Netz. Bei der Modellierung des Systems durch ein unsicheres Netz werden sozusagen gewisse für die Nebenläufigkeitsstruktur des Systems wichtige Strukturen nicht berücksichtigt. Es scheint in der Tat so, als ob dies auch für strenge Netze gilt. Es gibt eine Fülle von Untersuchungen, die als Versuch zu werten sind, das strenge Netzmodell durch weitere Spezialisierung (z.B. state-machine-/event-machine-decomposable, chinese-menu-property) zu befähigen, detaillierte Nebenläufigkeits-, Koordinations-, Kommunikations- und Informationsflußstrukturen darzustellen.

Die Bedeutung, die der Begriff "Nebenläufigkeit" in derartigen Überlegungen hat, unterscheidet sich sowohl von der subjektiven durch ein Nebenläufigkeitsmodell definierten Bedeutung als auch von der eigentlichen Nebenläufigkeit, die die Gemeinsamkeiten aller subjektiven Bedeutungen des Begriffs "Nebenläufigkeit" beinhaltet. Sie entspricht vielmehr dem, was man mit "totaler" Nebenläufigkeit bezeichnen könnte, nämlich der Zusammenfassung aller eben genannten Strukturen, die man einem objektiven Nebenläufigkeitsbegriffs untergeordnet sehen möchte.

Die Tatsache, daß ein Modell für totale Nebenläufigkeit noch nicht gefunden worden ist, zeigt, daß die formale Definition dieses Begriffs noch längst nicht abgeschlossen ist. Das Suchen nach einem solchen Modell, also nach speziellen Strukturen zur formalen Definition der sich dem Begriff "totale Nebenläufigkeit" unterordnenden Phänomene, steht aber auf einer anderen Ebene als die in dieser Arbeit gemachten Untersuchungen über eigentliche Nebenläufigkeit. Hier soll nicht versucht werden, durch Maximierung der Strukturiertheit des Modells ein möglichst detailliertes formales Abbild der totalen Nebenläufigkeit eines Systems zu bekommen. Vielmehr wird durch Minimierung der zur Darstellung von Nebenläufigkeit notwendigen Strukturen versucht, jedem auch noch so unvollkommenen Nebenläufigkeitsmodell den Gehalt an Struktur zu entnehmen, der zur eigentlichen Nebenläufigkeit des Systems beiträgt.

Beide Zugänge zur Modellierung der Nebenläufigkeitsstruktur eines Systems könnten eventuell nach einer Ausreifung der Theorie gemeinsam zu einem effektiven Modellierungsverfahren beitragen. Eine Darstellung des Systems in dem Modell für totale Nebenläufigkeit wäre dabei das erwünschte Ziel. Dieses Ziel wird jedoch durch intuitive Modellierung nur schwer zu erreichen sein. Durch die intuitive Modellierung des Systems müßten nämlich die folgenden Fragen "auf einmal" beantwortet werden:

- a) Was sind die signifikanten interagierenden Teile (parts) des Systems ?
 - b) Wie sehen die Abhängigkeiten zwischen diesen Teilen aus ?
 - c) Was sind die Werte (values), die zwischen den Teilen während ihrer Interaktion ausgetauscht werden ?
- und andere.

Das Modell der totalen Nebenläufigkeit des Systems wird also im allgemeinen "durch scharfes Hinsehen" allein nicht konstruiert werden können.

Deshalb ist es sinnvoll, mit einer "naheliegenden" Modellierung des Systems in einem "unschönen" Nebenläufigkeitsmodell zu beginnen. Vielleicht ist man dann in der Lage, die Erstellung des Modells der totalen Nebenläufigkeit des Systems in einer Anzahl von Schritten zu unternehmen, die teilweise formalen Regeln unterworfen und für sich allein genommen keinen großen intellektuellen Aufwand zur Korrektur der Systemmodellierung erfordern. So könnte man sich von einer "offensichtlichen" Systemmodellierung in einem geeigneten Nebenläufigkeitsmodell durch schrittweise fortschreitende Systemanalyse, die durch den Formalismus unterstützt wird, Stück für Stück der Aufdeckung der totalen Nebenläufigkeitsstruktur des Systems nähern.

Es erscheint mir daher nicht sinnvoll, die Analyse mancher existierender zweifellos unvollkommenen Nebenläufigkeitsmodelle zu Gunsten der Konstruktion eines Modells für totale Nebenläufigkeit aufzugeben. Vielmehr kann die Aufdeckung des Maßes an Nebenläufigkeitsstruktur, die auch den unvollkommenen Systemmodellen unterliegt, die Anwendbarkeit dieser Modelle auf Nebenläufigkeitsprobleme sehr verbessern. Die in dieser Arbeit vorgenommene formale Definition des Begriffs "eigentliche Nebenläufigkeit" soll als Beitrag hierzu verstanden werden.

3.4 Systemmodelle und Systemverhalten

Die Repräsentation eines Systems in einem Nebenläufigkeitsmodell ist im allgemeinen ein mathematisches Konstrukt (z.B. ein markiertes Netz, ein Occurrence-System siehe [Holt68]). Dieses Konstrukt wird beim Vorgang der Modellierung des Systems auf intuitivem, d.h. nicht an formale Regeln gebundenem Wege erstellt.

Die Modellierung des Systems selbst ist unbedingt zu unterscheiden von der Modellierung einer Systemaktivität. Diese wird häufig durch Simulation der Systemaktivität in einer oder mehreren Schaltsequenzen unter

Berücksichtigung gewisser dynamischer Übergangsregeln (Schaltregeln) erstellt. In den letzten Jahren zeigte sich immer deutlicher, daß die Schaltsequenz kein adäquates Mittel zur Darstellung des System-Verhaltens (system behaviour) ist, das sich in einer Systemaktivität äußert. Das Maß an Willkür, das bei der Simulation der Systemaktivität durch eine Schaltsequenz vorliegt, läßt zu viele semantisch bedeutungslose Strukturen innerhalb der Schaltsequenz zu.

Auf der Suche nach geeigneteren Darstellungen des Systemverhaltens definierte A.W. Holt in [Holt68] die Occurrence-Graphen (occurrence graphs, o-graphs), die nur die kausalen Zusammenhänge zwischen den in einer Systemaktivität auftretenden Ereignissen beschreiben. Die aus einer Menge von o-graphs mit bestimmten Eigenschaften bestehenden o-systems wurden in [Holt68] quasi als neues Nebenläufigkeitsmodell eingeführt, das ein System durch die Modellierung aller seiner möglichen Verhaltensweisen beschreibt. Dabei wurde die Beziehung bestimmter o-systems zu Netzen untersucht. Über diese Betrachtungen gelangt man zu einer sinnvollen Definition des Systemverhaltens eines sicheren Petri-Netzes, ohne auf das Konzept der Schaltsequenz zurückgreifen zu müssen.

Unter anderem gab das Vorhandensein von o-graphs als Werkzeug zur Darstellung des Systemverhaltens Anlaß zu der Forderung, total von der "technisch" anmutenden Schaltsequenz abzugehen. Ich meine, daß diese Forderung nicht aufrecht erhalten werden kann, da sie die bei der Deutung der Simulation einer Systemaktivität an einem Netz (token game) auftretenden Probleme umgeht und nicht bewältigt.

Die o-graphs sind ein geeignetes Mittel zur Darstellung von Systemverhalten. Ihr Anwendungsbereich ist jedoch begrenzt. Sie sind z.B. nicht in der Lage, das Systemverhalten unsicherer Netze zu beschreiben. Ferner ist auch bei sicheren Netzen der Vorgang der Zuordnung eines

c-graph zu einer Systemaktivität völlig willkürlich, da diese Zuordnung einer intuitiven Modellierung des Systemverhaltens entspricht und keinerlei Regeln existieren, die sie in einen festen semantischen Rahmen stellen. Das liegt daran, daß durch einen Verzicht auf den Gebrauch von Schaltsequenzen das relativ effektive Werkzeug der Simulation zur Modellierung von Systemaktivitäten nicht nutzbar gemacht werden kann. Es wäre jedoch wünschenswert, Regeln für die Übersetzung von Systemaktivitäten in den Netzkontext zu erarbeiten. Es ist zu erwarten, daß die dabei eintretenden Erkenntnisse zu einem tiefen Verständnis der Semantik des token game führen. Darüberhinaus kann man durch eine Verallgemeinerung der Struktur der o-graphs zu einem Konzept zur Darstellung von Systemverhalten in Nebenläufigkeitsmodellen kommen, das sich als Modell für eigentliche Nebenläufigkeit verwenden läßt.

3.5 Netze als Systemmodell

Man wird dem universellen Gebrauch des Begriffs "System" wohl am besten dadurch gerecht, daß man ihn einen "Ausschnitt der Realität" bezeichnen läßt. Gemäß dieser Interpretation ist ein System im allgemeinen etwas sehr unpräzises und strukturloses. Die Modellierung eines Systems als markiertes Netz resultiert aber in einem wohldefinierten mathematischen Konstrukt. Darüberhinaus haben die Komponenten dieses Konstrukts Beziehungen zum System: Sie bedeuten gewisse Systemaspekte. Während der Modellierung des Systems wurden also die Beobachtungen, die über das System gemacht wurden, gegliedert. Auf intuitive Art und Weise wurden bestimmten Beobachtungen bestimmte Interpretationen auferlegt. Andere wurden als unwichtig völlig außer acht gelassen.

Der Vorgang der Modellierung ist nicht an formale Regeln gebunden und kann deshalb auf der Ebene des daraus resultierenden Netzes auch nicht formal auf "Korrektheit" überprüft werden. Die "Korrektheit" der Darstellung eines

Systems durch ein Netz ist also ein im einzelnen Fall verbal zu definierender und intuitiv nachzuprüfender Begriff. Es ist offensichtlich, daß die Modellierung von Systemaktivitäten am Netz nicht nur die formale Struktur des Netzes sondern auch die semantischen Beziehungen zwischen System und Netz zu berücksichtigen hat. Bei der Modellierung des Systems durch das Netz ist sozusagen eine verbale "Gebrauchsanweisung" zu erstellen, nach der Systemaktivitäten am Netz simuliert werden können.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, festzustellen, was in dieser Gebrauchsanweisung stehen muß, und wie sie zu interpretieren ist. Die aus den Überlegungen resultierenden Aussagen sind somit wieder als "Gebrauchsanweisung" zu verstehen, diesmal jedoch nicht für das Netz als Modell des speziellen Systems sondern für das Netzmodell als Formalismus zur Beschreibung von Systemen an sich. Sie sind damit auch ein Beitrag zur Analyse der Anwendbarkeit diskreter Systemmodelle auf die kontinuierliche Realität. Darüberhinaus werden sie Bedingungen enthalten, die als Beitrag zur Definition der Korrektheit der Modellierung eines Systems durch ein Netz betrachtet werden können (3.5.3 - 3.5.6).

Sei ein beliebiges System gegeben, das auf intuitivem Wege durch ein Netz dargestellt wurde. (In diesem Abschnitt wird zunächst noch nicht festgelegt, ob es sich dabei um ein strenges oder ein allgemeines Netz handelt.) Die folgenden Aussagen beinhalten die oben angedeutete Konkretisierung der Netzsemantik:

- 3.5.1 Die Transitionen sind als die einzigen aktiven Teile des Netzes zu verstehen. Jede Schaltung einer Transition modelliert eine in der Zeit ablaufende Veränderung im System, ein sogenanntes "Vorkommnis" (occurrence).
- 3.5.2 Eine Systemaktivität muß, um am Netz nachgestellt werden zu können, zunächst beobachtet werden. Der Simulationsvorgang teilt sich daher in zwei Phasen auf. Diese sind die Beobachtung der Systemaktivität und die Nach-

stellung der Systemaktivität am Netz.

Bei der Beobachtung werden je nach der Bedeutung der Transitionen des Netzes gewisse Vorkommnisse registriert und in Anweisungen zum Schalten von Transitionen übersetzt. Bei der Nachstellung werden diese Anweisungen schrittweise unter Berücksichtigung bestimmter Regeln ausgeführt. Es ist zum Verständnis des token game wichtig, daß diese Nachstellung nicht synchron mit der Beobachtung erfolgen muß. Diese Bedingung würde auch gar keinen Sinn ergeben, da die Nachstellung diskret verläuft, während die Beobachtung kontinuierlich vor sich geht.

Zur detaillierten Analyse dieser Vorgänge stelle man sich die Simulation durch zwei Einheiten durchgeführt vor:

Die Beobachtungseinheit agiert in kontinuierlichem Zeitmaßstab. Aus der dem Netz beiliegenden Gebrauchsanweisung entnimmt sie, welche Vorkommnisse im System in Transitionenschaltungen zu übersetzen sind. Alle derartigen in der Systemaktivität auftretenden Vorkommnisse werden von der Beobachtungseinheit auf ihr Eintreten hin registriert. Die Registration eines Vorkommnisses besteht aus der Generierung eines geordneten Paares (t, μ) mit den folgenden Komponenten:

t bezeichnet die Transition, die zur Modellierung des Vorkommnis im Netz schalten soll.

μ ist eine formale Zeitangabe. Die Form solcher Zeitangaben ist ebenfalls der dem Netz beigelegten Gebrauchsanweisung zu entnehmen. Sie kann sehr verschieden sein und muß nicht unbedingt eine reelle Zahl darstellen. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Vorkommnisse im allgemeinen nicht als punktförmig im Zeitkontinuum gedacht werden können, ist sogar davon abzuraten, reelle Zahlen als Zeitangaben zu benutzen.

(In den folgenden Ausführungen wird zur Veranschaulichung der gemachten Konstruktionen die Zeitangabe durch ein Element der Menge $O_c = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^+, b - a < c\}$, also durch ein offenes Intervall der positiven reellen Zahlenachse mit der Mindestlänge $c > 0$ konkretisiert.

Daß die Beobachtung eines Vorkommnisses Anlaß zur Generierung des Intervalls (a,b) gibt, soll die Zuverlässigkeit der Angabe der Beobachtungseinheit bedeuten, daß sich das Vorkommnis vollständig zwischen den Zeitpunkten a und b abgespielt hat. Durch diese Definition werden auch eventuelle Unzulänglichkeiten der Beobachtungseinheit (etwa Ungenauigkeiten bei der Beobachtung der Vorkommnisse, bei Reaktionen auf die Beobachtung oder bei der Zeitmessung) berücksichtigt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß diese spezielle Form der Zeitangabe nur zur Veranschaulichung dienen soll und keine für die folgenden Aussagen notwendige Voraussetzung darstellt.) Die geordneten Paare (t,μ) , die von der Beobachtungseinheit aufgrund der Beobachtung einer speziellen Systemaktivität generiert werden, seien in der Menge A zusammengefaßt (μ , die natürlich von der Systemaktivität abhängt).

Jedes geordnete Paar (t,μ) fungiert als Anweisung zum einmaligen Schalten der Transition t durch die Nachstelleinheit, die die beobachtete Systemaktivität am Netz nachspielen soll. Die Nachstelleinheit agiert in diskretem Zeitmaßstab. Bei der Ausführung der Anweisung (t,μ) gibt t Aufschluß darüber, welche Transition geschaltet werden soll. Offenbar spielt aber auch die Reihenfolge eine Rolle, in der die Nachstelleinheit die Anweisungen in der Menge A ausführt. Damit hier keine Vorschriften verletzt werden, wertet die Nachstelleinheit die Zeitangabe μ aus. Da μ durch die in kontinuierlichem Zeitmaßstab agierende Beobachtungseinheit generiert wird, die Nachstelleinheit aber in diskretem Zeitmaßstab arbeitet, müssen die Zeitangaben zunächst "diskretisiert" werden, um sie für die Nachstelleinheit verwertbar zu machen.

Dies geschieht durch die Definition einer Quasiordnung τ auf der Menge A . Diese Quasiordnung hat zusammen mit der Definition der Form der Zeitangaben in der dem Netz beigegebenen Gebrauchsanweisung zu stehen und die folgenden zusätzlichen Bedingungen zu erfüllen:

3.5.2.1 τ ist TOTAL, d.h.

$$(t_1, \mu_1), (t_2, \mu_2) \in A \quad (t_1, \mu_1) \tau (t_2, \mu_2) \vee (t_2, \mu_2) \tau (t_1, \mu_1)$$

3.5.2.2 τ besitzt Sequentialisierungen.

Die Semantik von τ wird durch die folgende Interpretation festgelegt:

$(t_1, \mu_1) \tau (t_2, \mu_2)$ bedeutet, daß das zur Generierung von (t_2, μ_2) führende Vorkommnis gemäß der Beobachtung nicht "vor" dem zur Generierung von (t_1, μ_1) führenden Vorkommnis stattfand. Daraus folgen die folgenden Interpretationen der beiden möglichen Relationen zwischen Anweisungen:

3.5.2.3 $(t_1, \mu_1) \tau (t_2, \mu_2) \wedge (t_2, \mu_2) \tau (t_1, \mu_1)$:

Gemäß der Beobachtung fand das zur Generierung von (t_1, μ_1) führende Vorkommnis "vor" dem zur Generierung von (t_2, μ_2) führenden Vorkommnis statt.

3.5.2.4 $(t_1, \mu_1) \tau (t_2, \mu_2) \wedge (t_2, \mu_2) \tau (t_1, \mu_1)$:

Bei der Beobachtung oder bei der anschließenden "Diskretisierung" ließen sich die zur Generierung von (t_1, μ_1) bzw. (t_2, μ_2) führenden Vorkommnisse zeitlich nicht trennen. (Da τ keine Ordnung sein muß, wird dies im allgemeinen nicht bedeuten, daß die Vorkommnisse gleichzeitig beobachtet wurden.)

Gemäß dieser Interpretation bedeutet die Bedingung

3.5.2.2, daß sich die Systemaktivität in einer höchstens abzählbaren Menge von Schritten abspielt, die aus Mengen zeitlich untrennbarer Vorkommnisse bestehen.

(Benutzt man als Zeitangaben offene Intervalle reeller Zahlen wie oben angegeben, so liegt es aufgrund der Interpretation von τ nahe, τ wie folgt zu definieren:

$$(t_1, (a_1, b_1)) \tau (t_2, (a_2, b_2)) : \Leftrightarrow a_1 < b_2$$

Die so definierte Relation τ ist immer reflexiv, nicht aber für beliebige Teilmengen von O transitiv. Durch Bilden der transitiven Hülle erhält man jedoch in jedem Fall eine Relation mit den gewünschten Eigenschaften.

Hier gewinnen Eigenschaften des modellierten Systems Bedeutung, die man mit der Frage untersucht, ob die diskrete Modellierung des System durch das Netz der "Natur" des Systems entspricht. Man kann z.B. durch die folgende Bedingung sichern, daß τ Quasiordnung ist:

$$\begin{aligned} 3.5.2.5 \quad & (t_1, (a_1, b_1)), (t_2, (a_2, b_2)), (t_3, (a_3, b_3)) \in A \\ & (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \neq \emptyset \quad (a_2, b_2) \cap (a_3, b_3) \neq \emptyset \Rightarrow \\ & (a_1, b_1) \cap (a_3, b_3) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Die Bedingung 3.5.2.5 ist sogar äquivalent zu der Tatsache, daß τ Quasiordnung ist. Die Bedingung entspricht aber der Tatsache, daß das System zu bestimmten "diskreten" Zeitpunkten gehäufte Aktivität zeigt und nicht gleichmäßig über die Zeit aktiv ist, daß es also diskreter Natur ist. Je mehr Anweisungen die obige Bedingung verletzen, je "kontinuierlicher" das System also ist, desto größer wird der Unterschied der Quasiordnung, also der transitiven Hülle von τ zu τ , und desto mehr Information geht daher bei der Diskretisierung der Zeitangaben verloren.)

Die Quasiordnung τ auf der Menge A gibt der Nachstelleinheit Auskunft über die Fähigkeiten der Beobachtungseinheit, Beobachtungen von Vorkommnissen zeitlich zu trennen. Es ist sinnvoll, dabei zusätzlich zu fordern, daß verschiedene Vorkommnisse, die zur Generierung von Anweisungen zum Schalten derselben Transition führen, von der Beobachtungseinheit in eine zeitliche Reihenfolge gebracht werden können:

$$3.5.2.6 \quad (t, \mu_1), (t, \mu_2) \in A \Rightarrow (t, \mu_1) \tau (t, \mu_2) \neq (t, \mu_2) \tau (t, \mu_1).$$

Aus 2.3.11 und 2.2.12 folgt damit, daß die Beobachtungseinheit nur abzählbar viele Anweisungen zum Schalten derselben Transition generieren kann und daß sich die entsprechenden Vorkommnisse je durch ein geordnetes Paar aus Transition und einer Folgennummer bezeichnen lassen (zu lesen etwa als: (t, n) ist das Vorkommnis, das zur Generierung der Anweisung (t, μ_n) Anlaß gibt, wobei μ_n das n -te Element der gemäß τ geordneten Menge der Zeitangaben aller Anweisungen der Form (t, μ) ist).

Nun ist zu erläutern, wie die Nachstelleinheit die Zeitangaben in den Anweisungen beim Nachspielen der Systemaktivität am Netz berücksichtigt:

Die Nachstelleinheit spielt die Systemaktivität in einer Schaltsequenz nach. Würden ihr dabei keine Bedingungen zur Reihenfolge der Ausführung der in A gegebenen Anweisungen auferlegt, so könnte sie Schaltungen von Transitionen beliebig vertauschen, d.h. in umgekehrter Reihenfolge ausführen, als die Relation zwischen den entsprechenden Anweisungen bezüglich der Quasiordnung angibt. Solche Vertauschungen können jedoch unerwünscht sein. So wird es z.B. im Falle eines jeden Modells notwendig sein zu fordern, daß die Anweisung zur n -ten Schaltung der Transition t , also die durch das Vorkommenis (t, n) erzeugte Anweisung, vor der Anweisung zur $n+1$ -ten Schaltung der Transition t ausgeführt wird. Diese und andere derartige Bedingungen können berücksichtigt werden, indem man der Nachstelleinheit gewisse Einschränkungen auferlegt. Diese Einschränkungen sind nicht systemspezifisch (also nicht in der bei der Modellierung des Systems erstellten Gebrauchsanweisung enthalten). Vielmehr sind sie modellspezifisch, also ein Teil des Kalküls des Netzmodells. Da das Netzmodell an dieser Stelle noch nicht konkretisiert wurde, können diese Einschränkungen im Detail hier noch nicht angegeben werden. Dies wird in extra dafür vorgesehenen Abschnitten geschehen. Lediglich diese Einschränkungen werden beim Nachstellen der Systemaktivität am Netz berücksichtigt.

Nachdem nun der Simulationsvorgang definiert ist, werden einige zusätzliche Bedingungen angegeben, die ein Netz als Systemmodell erfüllen soll. Diese Zusatzbedingungen tragen also zur Festlegung des Korrektheitsbegriffs bei:

- 3.5.3 Das Ergebnis der Simulation einer jeden Systemaktivität ist eine Schaltsequenz des modellierenden Netzes, d.h. berücksichtigt die Transitionenregel des Netzmodells. Aufgrund der losen Abhängigkeit der Nachstelleinheit von der Beobachtungseinheit, also wegen der eingeschränkten Freiheiten der Nachstelleinheit bei dem Nachspielen der beobachteten Systemaktivität ist diese Schaltsequenz

i.a. nicht eindeutig bestimmt aber auch nicht völlig beliebig. Die Systemaktivität wird also im Netz vollständig durch die Menge aller möglichen Schaltsequenzen charakterisiert, die Ergebnis einer Simulation der Systemaktivität sein können.

Die folgende Forderung ergibt sich aus dem Wunsch nach einer zentralen Rolle der Simulation bei der Modellierung von Systemaktivitäten:

3.5.4 Jede Systemaktivität wird (in Verstärkung von 3.5.3) schon durch jede einzelne durch ihre Simulation entstehende Schaltsequenz eindeutig charakterisiert. Zur Modellierung einer Systemaktivität im Netz ist also in jedem Falle lediglich eine einzige Simulation der Systemaktivität notwendig.

3.5.5 Jede Schaltsequenz des Netzes ist Ergebnis mindestens einer möglichen Simulation mindestens einer möglichen Systemaktivität.

3.5.4 und 3.5.5 haben Konsequenzen für den Netzkalkül. Ihnen gemäß läßt sich nämlich die Menge der Schaltsequenzen eines Netzes (durch eine Äquivalenzrelation) in Klassen einteilen. Jede Klasse enthält genau all jene Schaltsequenzen, die bei der Simulation einer festen Systemaktivität entstehen können.

Nun kann untersucht werden, wie sich die der Nachstelleinheit beim Nachspielen einer beobachteten Systemaktivität auferlegten Freiheiten bzw. Einschränkungen in den Netzkalkül einordnen lassen:

3.5.6 Die Einschränkungen, die der Nachstelleinheit beim Nachspielen einer beobachteten Systemaktivität am Netz auferlegt werden, charakterisieren das Maß an Struktur der Systemaktivität, das im Netzkontext als relevant betrachtet wird. Offenbar resultieren diese Einschränkungen in dem Tatbestand, daß nur gewisse Schritte beim Nachspielen vertauschbar sind. Es ist naheliegend, die Einschränkungen durch ein Muster von kausalen Abhängigkeiten zwischen den Anweisungen (oder noch besser den sie generierenden Vorkommnissen) zu definieren, das

über die Vertauschbarkeiten Aufschluß gibt. Dieses Muster wird einem o-graph ähneln. Jede Klasse von einer bestimmten Systemaktivität modellierenden Schaltsequenzen wird dann durch ein derartiges Abhängigkeitsdiagramm charakterisiert, das die Modellierung des in der Systemaktivität zum Ausdruck kommenden Systemverhaltens ist. Auf diese Weise führt die genaue Definition des Vorgangs der Simulation einer Systemaktivität am Netz zu einer formalen Definition von Systemverhalten für das entsprechende Netzmodell.

Bis jetzt wurde der Simulationsvorgang stets als aus zwei hintereinander auszuführenden Phasen bestehend beschrieben. "Nach" der Vollendung der Beobachtung der Systemaktivität wird anhand der generierten Anweisungen die Nachstellung am Netz vollzogen.

Natürlich kann man sich beide Phasen auch als überlappt vorstellen. Dazu bildet man den (etwa durch die Menge N der natürlichen Zahlen dargestellten) diskreten Zeitmaßstab, in dem die Nachstelleinheit agiert, durch eine beliebige streng monoton steigende unbeschränkte Funktion f in den durch die Quasiordnung τ strukturierten kontinuierlichen Zeitmaßstab A ab. Die Nachstelleinheit verwertet dann in jedem Schritt n die bis zur Zeit $f(n)$ generierten Anweisungen, d.h. die Anweisungen, deren Zeitangabe bezüglich der Quasiordnung τ nicht größer als $f(n)$ ist. Daß die "späteren" Anweisungen von der Nachstelleinheit nicht berücksichtigt werden, soll bedeuten, daß die Nachstelleinheit den Schritt n zu einem Zeitpunkt ausführt, da diese Anweisungen von der Beobachtungseinheit noch nicht generiert sind. Daraus resultiert lediglich eine Einschränkung der von der Nachstelleinheit ausführbaren Vertauschungen von Transitionenschaltungen. Denn die Nachstelleinheit kann ja nicht zwei Transitionenschaltungen vertauschen, von denen die Anweisung zu der späteren noch gar nicht generiert wurde. Die Beschränkung wird jedoch durch die Beliebigkeit der Funktion, die den diskreten Zeitmaßstab in den

kontinuierlichen Zeitmaßstab abbildet, aufgehoben.

(Man kann die Ausführung des n-ten Schrittes durch die Nachstelleinheit so weit hinauszögern, bis die spätere Anweisung von der Beobachtungseinheit generiert worden ist.

Die in Abschnitt 3.5 am Beispiel der Netzmodelle für Nebenläufigkeit erörterten Richtlinien zur Modellierung von Systemaktivitäten scheinen mir für eine große Anzahl von Nebenläufigkeitsmodellen charakteristisch zu sein. Ihre Formalisierung führt zur formalen Definition eines eigentlichen Nebenläufigkeitsmodells. In ihr wird die Struktur der Darstellung von Systemverhalten durch ein Nebenläufigkeitsmodell festgelegt.

4. Das diskrete Modell für eigentliche Nebenläufigkeit

Das diskrete Modell für eigentliche Nebenläufigkeit soll die Möglichkeit geben, die in 3.5 erwähnten der Nachstellenheit aufzuerlegenden Einschränkungen formal zu definieren.

Es besteht aus drei Komponenten:

- 4.1 Eine Menge Σ von Systemkomponenten. Im Falle eines Netzmodells für Nebenläufigkeit sind die Komponenten die (aktiven) Transitionen des Netzes.
- 4.2 Eine Schaltmenge Ω über Σ , die alle möglichen Ergebnisse von Simulationen von Systemaktivitäten enthält. Im Falle eines Netzmodells ist die Schaltmenge die Menge der Schaltsequenzen des Netzes (siehe 3.5.4, 3.5.6).

4.2.1 Axiom: Σ sei Menge. Eine Menge $\Omega \subseteq P(\Sigma)^N$ heißt PRÄSCHALTMENGE über Σ , falls gilt:

a) Ω ist PRÄFIXABGESCHLOSSEN, d.h. es gilt:

$$E \in \Omega \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} E|_n \in \Omega \quad \text{für alle } E \in P(\Sigma)^N$$

b) Ω ist INDUKTIV, d.h. es gilt:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} E|_n \in \Omega \Rightarrow E \in \Omega \quad \text{für alle } E \in P(\Sigma)^N.$$

c) $\bigwedge_{t \in \Sigma} \bigvee_{E \in \Omega} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} t \in E(n).$

4.2.2 Bem.: a) Ω heißt induktiv, wenn 4.2.1.b) gilt, weil Ω genau dann bezüglich einer in naheliegender Weise zu definierenden Präfixordnung induktiv geordnet ist.

b) 4.2.1.a) und 4.2.1.b) ermöglichen die Interpretation einer Schaltsequenz als diskretes Modell einer zeitlich ablaufenden Systemaktivität.

Gemäß den Überlegungen in 3.5 können mehrere Schaltsequenzen Ergebnis der Simulation derselben Systemaktivität sein. Die Formalisierung der der Nachstellenheit aufzuerlegenden Einschränkungen setzt voraus, daß in allen solchen Schaltsequenzen bestimmte Transitionenschaltungen als Modellierungen desselben Vorkommnisses in der Systemaktivität erkannt werden. Die in 3.5 ge-

machten Bemerkungen über die Nachstellung von Vorkommissen, die zur Schaltung derselben Transition führen, zeigen, daß dies durch eine Numerierung der Transitionenschaltungen in der Schaltsequenz erreicht werden kann.

4.2.3 Def.: Ω sei Präschaltmenge über Σ .

a) Die Menge $O\Sigma$ aller (ELEMENTAREN) AKTIONEN auf Σ ist definiert durch $O\Sigma := \{(t, n) \mid t \in \Sigma \wedge n \in \bar{N}\}$.

b) Die Abbildung $i_\Sigma: \Omega \rightarrow P(\Sigma)^N$ wird definiert durch:

Sei $E \in \Omega$.

$$E'(1) := \{(t, 1) \mid t \in E(1)\}$$

$$E'(n+1) := \{(t, k) \mid k = \min\{j \mid \bigwedge_{i \leq n} (t, j) \notin E'(i)\}, t \in E(n+1)\}.$$

$$i_\Sigma(E)(n) := E'(n) \quad \text{für } n \in N.$$

c) Sei $E \in \Omega$. $O\Sigma(E) := \{x \in O\Sigma \mid \bigwedge_{n \in N} x \in i_\Sigma(E)(n)\}$.

4.2.4 Bem.: Die Abbildung i_Σ ist injektiv und interpretiert eine Schaltsequenz in der in 3.5 geforderten Weise. In Zukunft wird nicht mehr explizit zwischen der Schaltsequenz E und ihrer Interpretation $i_\Sigma(E)$ unterschieden. Welche Konstruktion gemeint ist, geht aus dem Zusammenhang hervor.

Nach 3.5 hat nicht die gesamte Struktur der Schaltsequenz semantische Bedeutung, sondern nur die von N übertragene Quasiordnung τ_E . Dem trägt das folgende Axiom Rechnung, das die in 3.1.b) beschriebene Struktur formalisiert.

4.2.5 Axiom: Eine Präschaltmenge Ω über Σ heißt SCHALTMENGE über Σ , falls gilt:

$$E_1 \in \Omega \wedge E_2 \in P(O\Sigma)^N \wedge \tau_{E_1} = \tau_{E_2} \Rightarrow E_2 \in \Omega.$$

Trotz der Tatsache, daß die gesamte Semantik der Schaltsequenz E in der Relation τ_E enthalten ist, wird an dem Konzept der Schaltsequenz festgehalten, da es in Beweisen leichter zu handhaben ist. (Eine Einschränkung auf

die Betrachtung von τ_E käme der Bedingung gleich, daß Schaltsequenzen keine leeren Glieder haben dürfen. Das würde die Flexibilität des Konzeptes im Hinblick auf Indexmanipulationen verringern.)

4.3 Ein Ablaufbegriff π auf der Schaltmenge Ω .

4.3.1 Axiom: Ω sei Schaltmenge über Σ . Unter einem ABLAUFBEGRIFF auf Ω versteht man eine Äquivalenzrelation π auf Ω , für die gilt:

- a) $E_1 \pi E_2 \Rightarrow O\Sigma(E_1) = O\Sigma(E_2) =: O\Sigma([E_1]_\pi)$ für $E_1, E_2 \in \Omega$.
- b) $\bigwedge_{K \in \Omega/\pi} K = L(\tau_K)$. Hierbei ist τ_K nach 2.3.8 definiert.
- c) Ω/π ist PRÄFIXABGESCHLOSSEN, d.h. es gilt:
 $K \in \Omega/\pi \wedge (L, \tau) < (O\Sigma(K), \tau_K) \Rightarrow (L, \tau) \in \Omega/\pi$.
- d) Ω/π ist bezüglich der PRÄFIXORDNUNG $<$ auf Ω/π :
 $K_1 < K_2 \Leftrightarrow (O\Sigma(K_1), \tau_{K_1}) < (O\Sigma(K_2), \tau_{K_2})$ für $K_1, K_2 \in \Omega/\pi$
induktiv geordnet.

Die Menge der Ablaufbegriffe auf Ω wird mit A_Ω bezeichnet. Ist π Ablaufbegriff auf Ω , so heißt $K \in \Omega/\pi$ ABLAUF. τ_K heißt (ABLAUF)STRATEGIE.

$T_\pi := \{\tau_K | K \in \Omega/\pi\}$ heißt die MENGE DER ABLAUFSTRATEGIEN von π . Für $t \in O\Sigma(K)$ heißt $[t]_{\tau_K}$ die KOMPLEXAKTION, der t gemäß τ_K angehört.

Der Ablaufbegriff ist die Formalisierung der der Nachstelleinheit aufzuerlegenden Einschränkungen. Die durch den Ablaufbegriff induzierte Klassifizierung der Schaltsequenzen entspricht der in 3.5.5 angegebenen Klassifizierung in Klassen von Schaltsequenzen, die Ergebnisse der Simulation derselben Systemaktivität sein können. Dabei stellt jedes τ_K für $K \in \Omega/\pi$ eine "Strategie" dar, nach der eine durch eine Sequenz aus K simulierte Systemaktivität abläuft. τ_K ist somit die formale Repräsentation des sich in einer durch Sequenzen aus K simulierten Systemaktivität äussernden Systemverhaltens.

Durch die Identifizierung in $O\Sigma(K)$ von gleich nummerierten Transitionenschaltungen in verschiedenen Schaltsequenzen aus K werden Schaltungen identifiziert, die durch die Ausführung der aufgrund der Beobachtung desselben Vorkommnisses generierten Anweisung entstehen, sofern man sich die Schaltsequenzen als Ergebnisse verschiedener Simulationen derselben Systemaktivität denkt. Da die Nachstelleinheit in jedem Fall die Nachstellung der beobachteten Systemaktivität ohne jede Vertauschung der Ordnung der durch die Beobachtungseinheit generierten Anweisungen vornehmen kann, ist die aus dieser Nachstellung folgende "kanonische" Schaltsequenz in jedem Fall in K enthalten. (Die kanonische Schaltsequenz ist einfach die (aufgrund von 3.5.2.2 existierende und aufgrund von 3.5.2.1 eindeutige) Sequentialisierung der in 3.5.2 erwähnten Quasiordnung τ .)

Sei nun angenommen, die Simulation einer Systemaktivität führe zu der Schaltsequenz $E \in K$. Die Interpretation der Beziehungen der Transitionenschaltungen gemäß τ_K lautet wie folgt:

4.3.a) t und t' sind unabhängig, d.h. stehen in keiner Relation bezüglich τ_K ($t, t' \in O\Sigma(K)$):

Man weiß nicht, in welcher Reihenfolge die zu t und t' führenden Vorkommnisse eingetreten sind. Das liegt daran, daß der Nachstelleinheit völlige Freiheit darüber gelassen wurde, in welcher Reihenfolge sie t und t' ausführt. Man kann sich diese Freiheit als Folge einer gewissen Unabhängigkeit zwischen den entsprechenden Vorkommnissen vorstellen, die in der Repräsentation des Systems im Modell zu Ausdruck kommt.

4.3.b) $t \text{ SOR}(\tau_K) t'$ ($t, t' \in O\Sigma(K)$):

Die Beobachtungseinheit erkannte, daß das zu t führende Vorkommnis vor dem zu t' führenden Vorkommnis eintrat. Das folgt aus der Tatsache, daß die kanonische Schaltsequenz der simulierten Systemaktivität in K enthalten, also eine Sequentialisierung von τ_K ist. Darüberhinaus war die Nachstell-

einheit gezwungen, t vor t' zu schalten. Das kann als Folge der Tatsache interpretiert werden, daß die Systemmodellierung das zu t führende Vorkommnis als Voraussetzung des zu t' führenden Vorkommnisses, bzw. umgekehrt das zu t' führende Vorkommnis als Folge des zu t führenden Vorkommnisses erscheinen läßt.

4.3.c) $t \text{ EQ}(\tau_K) t' \quad (t, t' \in \Sigma(K))$:

Die Beobachtungseinheit konnte die zu t und t' führenden Vorkommnisse zeitlich nicht trennen. Dies folgt aus der Tatsache, daß die kanonische Schaltsequenz Sequentialisierung von τ_K ist. Darüberhinaus wurde der Nachstelleinheit nicht erlaubt, Änderungen an der Reihenfolge von t und t' vorzunehmen. Diese Situation kann verschieden interpretiert werden. In manchen Fällen mag sie einem Mangel an Struktur in der Repräsentation des Systems innerhalb des Modells Rechnung tragen, der zu einem Mangel an Information über die Geschehnisse während der Systemaktivität führt. In anderen Fällen mag sie die Formalisierung von Wissen über eine gewisse symmetrische Abhängigkeit zwischen den zu t und t' führenden Vorkommnissen sein, die t und t' sozusagen untrennbar verbindet. Dann reflektiert sie nicht einen Mangel an Information sondern vielmehr ihr Vorhandensein.

Die Bedingungen 4.3.1.c) bzw. 4.3.1.d) entsprechen den Bedingungen 4.2.1.a) bzw. 4.2.1.b) und ermöglichen die Einbeziehung einer Vorstellung von "zeitlichem Ablauf" in die Interpretation der Strategien, indem sie der Freiheit über die Länge einer Beobachtung Rechnung tragen. Nach 4.3.1.c) ist mit einer Strategie auch jede zeitlich "kürzere" Strategie im System beobachtbar. Nach 4.3.1.d) ist eine zeitlich "unbegrenzte" Strategie beobachtbar, wenn jede zeitlich "begrenzte" Teilstrategie beobachtbar ist.

4.3.2 Lemma: Sei π Ablaufbegriff auf einer Schaltmenge Ω .

Sei T eine Menge von Quasiordnungen. Dann folgt aus $\Omega/\pi = \{L(\tau) \mid \tau \in T\}$, daß gilt: $T = T_\pi$.

Bew.: 2.3.18

4.3.3 Bem.: Lemma 4.3.2 besagt, daß T_π die einzige Menge T von Strategien ist, die die Klasseneinteilung von π induziert, das heißt für die gilt: $E \pi E' \Leftrightarrow E$ und E' verfolgen dieselbe Strategie in T .

4.3.4 Def.: (Σ, Ω, π) heißt NEBENLÄUFIGKEITSSTRUKTUR, wenn Σ Menge, Ω Schaltmenge über Σ und π Ablaufbegriff auf Ω ist.

Als Beitrag zur Darstellung eines Systems in einem anderen Nebenläufigkeitsmodell oder als autarke Systemdarstellung im eigentlichen Nebenläufigkeitsmodell beschreibt die Nebenläufigkeitsstruktur (in Gemeinschaft mit einer bei der Modellierung zu erstellenden Gebrauchsanweisung, die nach den in 3.5.2 erläuterten Prinzipien aufgebaut ist) im wesentlichen den Vorgang der Simulation von Systemaktivitäten. Dabei gibt Ω die Menge der möglichen "Ergebnisse" der Simulation an. π formalisiert die Freiheiten, die der Nachstelleinheit beim Nachspielen einer beobachteten Systemaktivität gelassen werden. Die formalen Eigenschaften von π als Ablaufbegriff ermöglichen es, einer Systemaktivität durch einmalige Simulation das in ihr geäußerte Systemverhalten zu entnehmen. Ferner legen sie fest, daß sich dies Systemverhalten genau in den Freiheiten äußert, die der Nachstelleinheit beim Nachspielen der Systemaktivität gelassen werden (4.3.1.b).

Man kann Ω für sich genommen als einen Teil des Systemmodells verstehen, der die möglichen Simulationsergebnisse festlegt aber noch nichts über die Freiheiten beim Nachspielen aussagt. Die Definition des Systemverhaltens läßt sich dann durch Aufprägen eines Ablaufbegriffs π auf Ω bewerkstelligen. Die Frage, ob auf jeder Schaltmenge Systemverhalten definiert werden kann, läßt sich positiv beantworten:

4.3.5 Def.: Ω sei Schaltmenge. Dann ist Δ_Ω Ablaufbegriff auf Ω mit $T_{\Delta_\Omega} = \{\tau_E \mid E \in \Omega\}$. Δ_Ω heißt der TRIVIALE AB-
LAUFBEGRIFF auf Ω .

Δ_Ω schränkt die Freiheiten der Nachstelleinheit total ein, d.

nur die kanonische Schaltsequenz kann Ergebnis der Simulation einer Systemaktivität sein. Im allgemeinen können der Schaltmenge einer Systemdarstellung in einem Nebenläufigkeitsmodell mehrere verschiedene Ablaufbegriffe aufgeprägt werden. Das bedeutet, daß auch nach Festlegung der bei der Modellierung mitzuliefernden Gebrauchsanweisung zur Übersetzung der Beobachtung von Systemaktivitäten in Anweisungen und bei Vorgabe der Schaltsequenzenmenge durch das Nebenläufigkeitsmodell noch Spielraum zur Definition der der Nachstelleinheit aufzuerlegenden Einschränkungen bleibt. Man hat also eine weitere (semantische) Bedingung zu stellen, um die aus der Darstellung eines Systems in einem Nebenläufigkeitsmodell folgende Nebenläufigkeitsstruktur des Systems eindeutig definieren zu können. Diese semantische Bedingung entspricht genau der Festlegung der der Nachstelleinheit aufzuerlegenden Einschränkungen. Sie hat sich an der Semantik des Nebenläufigkeitsmodells zu orientieren und wird in Abschnitt 5 für die strengen Netze und in Abschnitt 7 für die allgemeinen Petri-Netze diskutiert.

4.3.6 Def.: π_1, π_2 seien Ablaufbegriffe auf Ω . π_1 heißt FEINER als π_2 , wenn gilt:

$$\tau_2 \in T_{\pi_2} \quad \tau_1 \in T_{\pi_1} \quad \tau_1 \leftarrow \tau_2 .$$

4.3.7 Bem.: a) π_1 ist genau dann feiner als π_2 , wenn gilt

$\pi_1 \supset \pi_2$. Bew.:

" $\Rightarrow$ ": Sei $E \in \pi_2$. Dann gilt $E, E' \in L(\tau_2)$ für ein $\tau_2 \in T_{\pi_2}$. Nun existiert $\tau_1 \in T_{\pi_1}$ mit $\tau_1 \leftarrow \tau_2$ also

$L(\tau_1) \supset L(\tau_2)$ also $E, E' \in L(\tau_1)$. Damit gilt $E \in \pi_1$.

" $\Leftarrow$ ": Sei $\tau_2 \in T_{\pi_2}$. Offenbar gilt für $L(\tau_2) \in \Omega/\pi_2$

wegen $\pi_1 \supset \pi_2$: Es existiert $K \in \Omega/\pi_1$ mit $K \supset L(\tau_2)$.

Daraus folgt $\tau_2 \rightarrow \tau_K \in T_{\pi_1}$.

b) Ist π_1 feiner als π_2 auf Ω , so ist für $E \in \Omega$

$\tau_{[E]}_{\pi_1}$ die einzige Relation $\tau \in T_{\pi_1}$, für die gilt

$$\tau \leftarrow \tau_{[E]}_{\pi_2} .$$

Zwei Festlegungen D_1 und D_2 der Einschränkungen für die Nachstelleinheit, die einem Nebenläufigkeitsmodell hinzugefügt zur Definition von π_1 bzw. π_2 führen, werden vergleichbar, wenn $\pi_1 \subset \pi_2$ gilt. D_2 läßt der Nachstelleinheit dann mehr Freiheiten als D_1 , erkennt also mehr Vorkommnisse als unabhängig voneinander. D_2 faßt damit mehrere von D_1 erkannte Strategien unter Elimination "überflüssiger" Abhängigkeiten zwischen Vorkommnissen zu einer umfassenderen Strategie zusammen. Unter diesem Gesichtspunkt gewinnt der folgende Fall besondere Bedeutung:

4.3.8 Def.: Besitzt Ω einen feinsten Ablaufbegriff π , so heißt Ω TOTAL ANALYSIERBAR. (Σ, Ω, π) heißt die VON Ω INDUZIERTER Nebenläufigkeitsstruktur.

4.3.9 Lemma: Es gibt Schaltmengen ohne feinsten Ablaufbegriff.

Bew.: Es wird ein Beispiel angegeben. Sei:

$$\Sigma := \tilde{N},$$

$$\Omega := \{P(n), n+1, n+2, \dots \mid n \in \tilde{N}, P(n) \in A_{\{1, \dots, n\}}\} \text{ sowie}$$

$$\bar{\Omega} := \{E \mid E \in \Omega, \bigvee_{n \in \tilde{N}} \tau_E = \tau_{E|_n}\}.$$

Sei $n \in \tilde{N}$ und $\leq_n^T$ auf $T \subset \tilde{N}$ definiert durch

$$x \leq_n^T y : \Leftrightarrow x \leq y \wedge (y > n \vee y = x).$$

Dann gilt $L(\leq_n^T, T) \subset \bar{\Omega}$. Besitze die Äquivalenzrelation

π_n als einzige mehrpunktige Äquivalenzklassen die

Mengen $L(\leq_n^T)$ für $T \subset \tilde{N}$. Dann ist π_n Ablaufbegriff.

Der feinste Ablaufbegriff auf Ω muß deshalb die

Relation $\bigcup_{n \in \tilde{N}} \pi_n = \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ umfassen, also mit ihr

identisch sein. $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ ist aber kein Ablaufbegriff

auf $\bar{\Omega}$, da $\{\tilde{N}\}$ keine Schaltsequenz von $\bar{\Omega}$ ist.

Eine von einer total analysierbaren Schaltmenge induzierte Nebenläufigkeitsstruktur erlaubt es, bei der Analyse des durch eine Systemaktivität geäußerten Systemverhaltens von allen anderen Strukturen im Modell als der Schaltmenge abzusehen. Durch die Schaltmenge selbst ist alle Information über Abhängigkeit und Unabhängigkeit zwischen Vor-

kommissen gegeben. Wertet man sie maximal aus, so kommt man zu dem feinsten Ablaufbegriff auf Ω , der in der induzierten Nebenläufigkeitsstruktur das Systemverhalten definiert.

5. Die dem Modell der "strengen Netze" unterliegende
Nebenläufigkeitsstruktur

Die Untersuchungen dieses Abschnitts dienen der Auf-
findung der eigentlichen Nebenläufigkeit von durch
strenge Netze modellierten Systemen. Dazu ist eine
dem Netz "unterliegende" Nebenläufigkeitsstruktur zu finden,
die mit der Netzsemantik verträglich ist.

Die Definition der unterliegenden Systemkomponenten-
menge sowie der unterliegenden Schaltmenge ist naheliegend.
Die Systemkomponenten eines markierten strengen Netzes
sind die Transitionen, die bei einer erreichbaren Mar-
kierung schalten können; die Schaltmenge ist die Schalt-
sequenzenmenge des Netzes.

Die folgenden Untersuchungen dienen dazu, zu einem Ablauf-
begriff zu gelangen, der beim Nachspielen der Systemakti-
vitäten am strengen Netz die Freiheiten läßt, die aus den
im Netz offenbar werdenden Unabhängigkeiten zwischen
Transitionenschaltungen resultieren. Wie sich zeigen wird,
reicht es dazu aus, gleichzeitig schaltende Transitionen
zu betrachten.

Durch das Netz ist für jede Transition eine Umgebung
innerhalb der Transitionenmenge des Netzes definiert.
Diese Umgebung wird durch sämtliche Transitionen gebil-
det, die mit der Transition durch Stellen verbunden sind.
Über diese Stellen findet zwischen der Transition und
ihrer Umgebung ein Informationsaustausch statt, der die
Transition vom Zustand ihrer Umgebung abhängig macht.
Eine solche Abhängigkeit existiert jedoch lediglich zwi-
schen Transitionen, die durch Stellen verbunden sind.
Zwei Transitionen ohne gemeinsame Randstellen stehen nicht
miteinander in derartigem Kontakt, können also voneinander
nichts "wissen" und sind in diesem Sinne als unabhängig
zu betrachten.

Nach Definition der Schaltregel für strenge Netze (3.1.6)
gibt es keine gleichzeitig schaltenden durch Stellen ver-
bundenen Transitionen. Aus den obigen Bemerkungen folgt

daher, daß alle gleichzeitig schaltenden Transitionen eines strengen Netzes unabhängige Vorkommnisse des von ihm modellierten Systems darstellen. In einem mit der Netzsemantik verträglichen Ablaufbegriff darf es also keine echten, d.h. mehrelementigen Komplexaktionen geben. Diese Bedingung liefert die semantische Restriktion zur Definition des durch ein strenges Netz dargestellten Systemverhaltens:

- 5.1 Bedingung. (für mit der Netzsemantik verträgliche Ablaufbegriffe): π ist Ablaufbegriff auf S und T_π ist eine Menge von Ordnungsrelationen.

Die folgenden Untersuchungen werden zeigen, daß die Bedingung 5.1 eindeutig einen Ablaufbegriff auf der Menge der Schaltsequenzen des Netzes auszeichnet, der dann die dritte Komponente der dem Netz unterliegenden Nebenläufigkeitsstruktur bildet.

- 5.2 Sei dazu (N, M) ein markiertes strenges Netz. Ein Ablaufbegriff, der 5.1 erfüllt wird auf jeden Fall die folgende Relation umfassen (siehe 2.2.13):

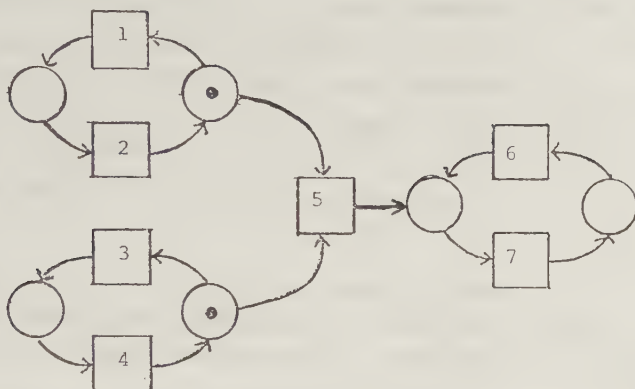
- 5.2.1 Def.: Die Relation $+$ auf S wird definiert durch:

$$E + E' :\Leftrightarrow O\Sigma(E) = O\Sigma(E') \wedge E \lambda_{O\Sigma(E)} E' \quad \text{für } E, E' \in S.$$

Die symmetrische Hülle von $+$ wird mit $\leftrightarrow$, die transitive Hülle von $\leftrightarrow$ wird mit $\sim$ bezeichnet.

Beispiele zeigen, daß $\sim$ echte Teilmenge des gesuchten Ablaufbegriffs π ist:

5.2.2 Beispiel:



Das oben dargestellte Netz hat unter anderen die Schaltsequenzen:

$$E_1 = ((\{1\}, \{2\})^n, \{3\}, \{4\})_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und}$$

$$E_\infty = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Gemäß der Netzsemantik sollten E_1 und E_∞ dieselbe Strategie verfolgen, da die Teile I und II des Netzes unabhängig voneinander sind, d.h. keine gemeinsamen Stellen haben. Trotzdem gilt: $\neg E_1 \sim E_\infty$.

Mit Hilfe von E_1 und E_∞ wird nun gezeigt, daß $\sim$ nicht die Bedingung 5.1 erfüllt. Dazu sei angenommen, $\sim$ erfülle 5.1. E_k sei für $k \in \mathbb{N}$ definiert durch:

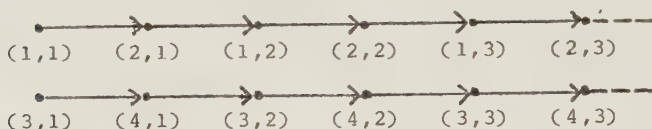
$$E_k := (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})^k, (\{1\}, \{2\})^{1+i_{\leq k}^1}, \{3\}, \{4\}, ((\{1\}, \{2\})^n, \{3\}, \{4\})_{n \in \mathbb{N}},$$

so gilt $E_i \sim E_{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$. Man kann nämlich

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ auf folgende Weise in $\{3\}, \{4\}, \{1\}, \{2\}$ transformieren:

$$\begin{aligned} \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} &\rightarrow \{1\}, \{2, 3\}, \{4\} \rightarrow \{1\}, \{3\}, \{2\}, \{4\} \\ &\rightarrow \{1, 3\}, \{2, 4\} \rightarrow \{3\}, \{1\}, \{4\}, \{2\} \rightarrow \{3\}, \{1, 4\}, \{2\} \\ &\rightarrow \{3\}, \{4\}, \{1\}, \{2\}. \end{aligned}$$

Die zur Klasse $[E_1]_{\sim}$ gehörende Ablaufstrategie von $\sim$ ist notwendig größer als die durch das folgende Hasse-Diagramm definierte Ordnung:



Das gilt darum, weil man mit dem oben angegebenen Transformationsverfahren jedes beliebige Paar $\{3\}, \{4\}$ in E_1 vor das erste Paar $\{1\}, \{2\}$ in E_1 transportieren kann, ohne $[E_1]_{\sim}$ zu verlassen.

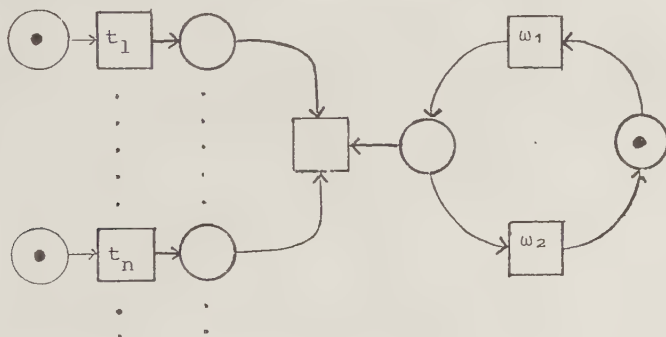
E_{∞} ist Sequentialisierung der durch das obige Hasse-Diagramm angegebenen Ordnung und somit auch Sequentialisierung der (gröberen) Ablaufstrategie von $[E_1]_{\sim}$. Es gilt jedoch $\vdash E_1 \sim E_{\infty}$.

(Bew.: Definiert man den INDEX einer Aktion t in einer Schaltsequenz E mit $i_E(t) = n$ als $\bigcup_{k < n} E(k)$, so wächst die Differenz der Indizes einer Aktion $(3, n)$ in E_1 und E_{∞} mit n unbeschränkt. Ein Schritt des Transformationsverfahrens, das durch 5.2.1 definiert wird, ändert den Index von $(3, n)$ aber um einen Betrag, der kleiner als 7 ist, da das Netz nur sieben Transitionen hat. Damit ist E_1 nicht in einem endlichen Transformationsweg nach 5.2.1 in E_{∞} überführbar.)

Das Beispiel 5.2.2 läßt vermuten, daß die gesuchte Äquivalenzrelation, die die Bedingung 5.1 erfüllt, durch Abschluß von $\sim$ bezüglich eines geeignet gewählten Konvergenzbegriffs definiert werden kann, in dem gilt $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow E_{\infty}$. Das Beispiel legt darüberhinaus nahe, den Konvergenzbegriff über eine Produkttopologie

$\prod_{n \in \mathbb{N}} T'$ zu definieren, wobei T' Topologie auf $P(\Sigma)$ ist. Dann gilt nämlich $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\prod_{n \in \mathbb{N}} T'} E$ genau dann, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ $(E_n(k))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{T'} E(k)$ gilt. Im Falle von endlichem Σ ist T' die diskrete Topologie auf $P(\Sigma)$. Bei unendlichen Transitionenmengen eignet sich eine gröbere Topologie auf $P(\Sigma)$ besser, wie das folgende Beispiel zeigt:

5.2.3 Beispiel:

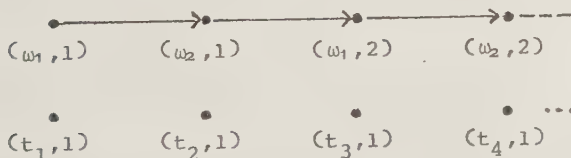


Das oben angegebene Netz hat unter anderem die Schaltsequenzen:

$$E_1 = (\{t_n\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\})_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und}$$

$$E_\infty = \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}, (\{\omega_1\}, \{\omega_2\})^{(1)}.$$

Ähnliche Argumente wie in 5.2.2 führen zu der Erkenntnis, daß die Ablaufstrategie von $[E_1]_\pi$ in einem 5.1 erfüllenden Ablaufbegriff π größer ist als die durch das folgende Hasse-Diagramm angegebene Ordnung:



Da E_∞ Sequentialisierung dieser Ordnung ist, gilt für einen Ablaufbegriff π , der 5.1 erfüllt:

$E, \pi E_\infty$. Will man jedoch nach der Art von Beispiel 5.2 E_∞ durch schrittweise Veränderung von E , als Limes d Folgen

$E_k := \{t_1, \dots, t_k\} \wedge (\{\omega_1\}, \{\omega_2\})^k, (\{t_{k+n}\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\})_{n \in \mathbb{N}}$ darstellen, so ist die diskrete Topologie auf $P(\Sigma)$ z fein gewählt.

Darum wird zunächst ein geeigneter Konvergenzbegriff auf der Potenzmenge einer Menge definiert durch:

5.2.4 Def.: X sei Menge. Die KANONISCHE Topologie τ_X auf $P(X)$ wird durch Identifizierung mit $\{0,1\}^X$ mittels der bijektiven Abbildung $j: P(X) \rightarrow \{0,1\}^X$, die jeder Teilmenge $T \subset X$ ihren charakteristischen Vektor $(j_t(T))_{t \in X}$ mit

$$j_t(T) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \notin T \\ 1 & \text{für } t \in T \end{cases}$$

zuordnet, definiert. $\{0,1\}^X$ trägt hierbei die Produkttopologie bezüglich der diskreten Topologie auf $\{0,1\}$.

5.2.5 Bem.: a) $(T_\lambda)_{\lambda \in L} \uparrow \tau_X$ gilt genau dann, wenn gilt

$$t \notin T \Rightarrow \bigvee_{\mu \in L} \bigwedge_{\lambda \geq \mu} t \notin T_\lambda$$

$$t \in T \Rightarrow \bigvee_{\mu \in L} \bigwedge_{\lambda \geq \mu} t \in T_\lambda. \text{ (Siehe 2.1.3)}$$

b) τ_X ist Hausdorfftopologie, da die diskrete Topologie auf $\{0,1\}$ Hausdorfftopologie ist.

c) Ist X endlich, so ist τ_X die diskrete Topologie auf $P(X)$.

5.2.6 Def.: Die Topologie τ auf $P(\Sigma)$ wird definiert durch $\tau := \prod_{n \in \mathbb{N}} \tau_\Sigma$, wobei τ_Σ die kanonische Topologie auf $P(\Sigma)$ ist.

5.2.7 Bem.: a) τ ist Hausdorfftopologie, da τ_Σ Hausdorfftopologie ist.

b) Ist Σ abzählbar, so erfüllt τ das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Der durch die in 5.2.6 definierte Topologie gegebene Konvergenzbegriff ist noch nicht der gesuchte. Es kann nämlich für den Abschluß $\bar{\cdot}$ bezüglich der Spurtopologie von T auf S immer noch gelten:

$E_1 \bar{\sim} E_2 \wedge O\Sigma(E_1) \neq O\Sigma(E_2)$. Eine Beispiel dazu liefert das in 5.2.2 betrachtete Netz. Dieses Netz hat unter anderem die Schaltsequenzen:

$$E_1 = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})^\omega \quad \text{und}$$

$$E_2 = (\{1\}, \{2\})^\omega.$$

Es gilt $E_1 \bar{\sim} E_2$ aber $O\Sigma(E_1) \neq O\Sigma(E_2)$.

Um den Konvergenzbegriff diesbezüglich zu berichtigen, wird eine Abbildung definiert, die zählt, wie oft eine Transition in einer Schaltsequenz schaltet.

5.2.8 Def.: a) Die Abbildung $s: P(\Sigma)^N \rightarrow \prod_{t \in \Sigma} \alpha N$

wird definiert durch:

$s(E) := (s_t(E))_{t \in \Sigma}$. Hierbei gilt:

$$s_t(E) := \begin{cases} \max\{n \mid \bigvee_{i \in N} (t, n) \in E(i)\} & \text{falls} \\ & \{n \mid t \in E(n)\} \text{ endlich ist} \\ \omega & \text{sonst.} \end{cases}$$

αN ist die Alexandroff-Kompaktifizierung von N .

Es gilt $s(E_1) = s(E_2) \iff O\Sigma(E_1) = O\Sigma(E_2)$.

5.2.9 Def.: Die Topologie I auf $P(\Sigma)^N$ wird definiert als die initiale Topologie bezüglich

$s: P(\Sigma)^N \rightarrow (\prod_{t \in \Sigma} \alpha N, \gamma)$. Hierbei ist γ die Produkttopologie; αN trägt die Topologie der Alexandroff-Kompaktifizierung von N .

5.2.10 Bem.: a) Nach 2.1.3 gilt:

$$(E_\lambda)_{\lambda \in L} \uparrow E \iff \bigwedge_{t \in \Sigma} (s(E_\lambda))_{\lambda \in L} \xrightarrow{\alpha N} s(E).$$

b) Ist Σ abzählbar, so erfüllt I das erste Abzählbarkeitsaxiom.

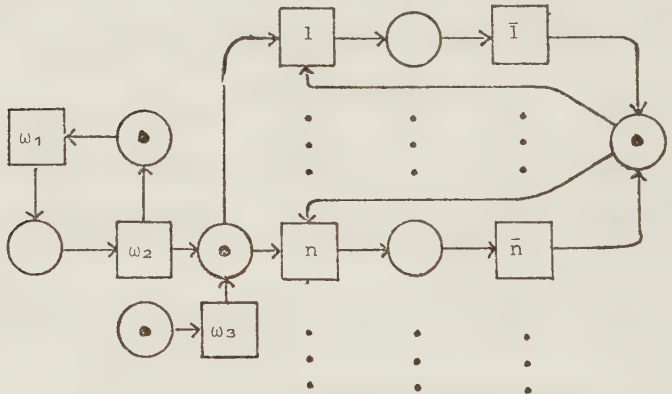
5.2.11 Def.: Die Topologie X' auf $P(\Sigma)^N$ wird definiert als das Supremum der Topologien T und I . $X' := \sup(T, I)$.

5.2.12 Bem.: a) X' ist Hausdorfftopologie, da T hausdorffsch ist und $T \subset X'$ gilt.

b) Ist Σ abzählbar, so erfüllt X' das erste Abzählbarkeitsaxiom.

c) Wie das folgende Gegenbeispiel zeigt, ist $S \subset P(\Sigma)^N$ im allgemeinen nicht abgeschlossen in X' .

5.2.13 Beispiel:



Sei das oben angegebene Netz betrachtet. Sei $E \in P(\Sigma)^N$ definiert als:

$$E := \{l\}, \{I\}, \{\omega_2\}, \{(\{k\}, \{\bar{k}\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\})_{k \leq n}\}_{n \geq 2}.$$

Dann sind für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Sequenzen Schaltsequenzen:

$$E_n := \{n, \omega_1\}, \{\bar{n}, \omega_3\}, E.$$

Sei $E_\omega \in P(\Sigma)^N$ definiert durch:

$$E_\omega := \{\omega_1\}, \{\omega_3\}, E. \text{ Dann gilt } (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \not\rightarrow E_\omega, \text{ } E_\omega \cdot E_\omega \text{ ist aber keine Schaltsequenz.}$$

Deshalb wird definiert:

5.2.14 Def.: X ist die Spurtopologie von X' auf der Menge S der Schaltsequenzen.

5.2.15 Bem.: Das Konvergenzkriterium für die Topologie X lautet:

Sei $(E_\lambda)_{\lambda \in L}$ eine Moore-Smith Folge von Schaltsequenzen und E eine Schaltsequenz. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (E_\lambda)_{\lambda \in L} \xrightarrow{X} E &\iff \bigwedge_{t \in \Sigma} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{\lambda \in L} \bigwedge_{\mu \geq \lambda} t \in E(n) \implies t \in E_\mu(n) \\ &\qquad t \in E(n) \implies t \notin E_\mu(n) \\ s_t(E) = \omega &\implies s_t(E_\mu) > n \\ s_t(E) < \omega &\implies s_t(E_\mu) = s_t(E). \end{aligned}$$

Der Abschluß der Äquivalenzrelation $\sim$ in der Topologie X soll im folgenden daraufhin untersucht werden, ob er einen mit der Netzsemantik verträglichen Ablaufbegriff auf S darstellt. Dazu wird folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

5.2.16 Def.: Der Abschluß der Relation $\sim$ in der Topologie X auf S wird mit $\approx$ bezeichnet. ($\approx := \sim$)

5.2.17 Bem.: Das Kriterium, mit dem die Äquivalenz zweier Schaltsequenzen bezüglich $\approx$ nachgewiesen wird, ergibt sich aus 5.2.15 und dem im Beweis von 2.1.8.a) genannten Kriterium. 5.2.13 hat zur Folge, daß zum Nachweis der Äquivalenz zweier Sequenzen bezüglich $\approx$ bei beiden Sequenzen die Zugehörigkeit zur Menge der Schaltsequenzen nachgewiesen werden muß.

Zunächst werden einige Aussagen über $\approx$ gemacht, die diese Relation veranschaulichen sollen.

5.2.18 Lemma: Sei $E_1, E_2 \in S$. Dann gilt: $E_1 \approx E_2 \implies s(E_1) = s(E_2)$.

Bew.: s ist stetig in X' , da $X' \supset I$ gilt,

also auch stetig in X . Für $E_1 \leftrightarrow E_2$ folgt sofort $s(E_1) = s(E_2)$ als Teilbedingung für die Gültigkeit von $E_1 \leftrightarrow E_2$. Damit gilt auch $E_1 \sim E_2 \Rightarrow s(E_1) = s(E_2)$. Gelte nun $E_1 \not\sim E_2$. Dann existiert eine Moore-Smith Folge $(E_{1\lambda}, E_{2\lambda})_{\lambda \in L}$ von Schaltsequenzenpaaren, die in $X \times X$ gegen (E_1, E_2) konvergiert und für die gilt: $E_{1\lambda} \sim E_{2\lambda}$ für $\lambda \in L$. Damit gilt:

$$s(E_1) = s(\lim_{\lambda \in L} E_{1\lambda}) = \lim_{\lambda \in L} s(E_{1\lambda}) = \lim_{\lambda \in L} s(E_{2\lambda}) = s(\lim_{\lambda \in L} E_{2\lambda}) = s(E_2)$$

Lemma 4.2.19 erlaubt die Definition der Ordnung $\leq_{[E]_X}$ (2.2)

auf der Menge $O\Sigma([E]) := O\Sigma(E)$, die Ablaufstrategie von $[E]_X$ sein muß, falls $\not\sim^X$ die Bedingung 5.1 erfüllt.

5.2.19 Lemma: Sei $K \in S/\not\sim^X$. Seien $t_1, t_2 \in O\Sigma(K)$ unabhängig in $\leq_K$. Dann gilt:

$$\exists E \in S \quad \exists i \in \mathbb{N} \quad \{t_1, t_2\} \subset E(i).$$

Bew.: Seien $t_1, t_2 \in O\Sigma(K)$ unabhängig in $\leq_K$. Dann existieren

$E_1, E_2 \in S$ mit $t_1 \leq_{E_1} t_2 \wedge t_2 <_{E_2} t_1$. O.B.d.A. sei angenommen: $t_1 <_{E_1} t_2 \wedge t_2 <_{E_2} t_1$. (Sonst gilt $t_1 = t_2$, und

die Behauptung ist trivial.) Nach Definition von $\leq_E$ gilt $i_{E_1}(t_1) = i < k = i_{E_1}(t_2)$ sowie $i_{E_2}(t_2) = l < j = i_{E_2}(t_1)$.

Ferner existieren $(E_{1\lambda}, E_{2\lambda})_{\lambda \in L}$ mit $E_1 = \lim_{\lambda \in L} E_{1\lambda}$ und

$E_2 = \lim_{\lambda \in L} E_{2\lambda}$. Damit gibt es $\mu \in L$ mit $i_{E_{1\mu}}(t_1) = i$,

$i_{E_{1\mu}}(t_2) = k$, $i_{E_{2\mu}}(t_1) = j$ und $i_{E_{2\mu}}(t_2) = l$ sowie $E_{1\mu} \sim E_{2\mu}$.

Das bedeutet $E_{1\mu} \leftrightarrow \tilde{E}_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \tilde{E}_n = E_{2\mu}$. Also muß für ein

$i < n$ gelten $t_1 <_{\tilde{E}_i} t_2 \wedge t_1 \not\sim_{\tilde{E}_{i+1}} t_2$. In diesem Fall

gilt nach Definition von $\leftrightarrow$ $\tilde{E}_i \leftrightarrow \tilde{E}_{i+1}$ und somit

$\{t_1, t_2\} \subset \tilde{E}_{i+1}(r)$ für ein $r \in \mathbb{N}$. $\tilde{E}_{i+1}$ ist die gesuchte

Schaltfolge.

5.2.20 Lemma: E_1, E_2 seien endliche Schaltsequenzen. Sei

$E_i(n_i) \neq \emptyset$ sowie $E_i(k) = \emptyset$ für $k > n_i$ und $i=1,2$.

(Man sagt: E_i hat die HÖHE n_i .) Gelte

ferner $0\Sigma(E_1) \subset 0\Sigma(E_2)$, sowie $T_k := E_2(k) - 0\Sigma(E_1)$

für $k \in \mathbb{N}$. Gelte $\text{act}(t, M(E_1))$. Dann gilt:

a) Gilt für alle $t' \in 0\Sigma(E_2) - 0\Sigma(E_1)$ $\neg \text{aff}(t, t')$,
so folgt $\text{act}(t, M(E_2))$.

b) Gelte $E_2(k) \neq E_1(k)$ für genau ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
 $\text{act}(t, M(E_2)) \Rightarrow t' \in T_k \neg \text{aff}(t, t')$

Bew.: a) Gelte $\text{act}(t, M(E_1))$, wobei $t \in \Sigma$ ist. Offenbar gilt für eine Stelle $p \in \Sigma$:

$$M(E_1)(p) = M(p) + \sum_{t' \in 0\Sigma(E_1)} (B(p, t') - F(p, t')),$$

$$M(E_2)(p) = M(p) + \sum_{t' \in 0\Sigma(E_2)} (B(p, t') - F(p, t'))$$

$$= M(E_1)(p) + \sum_{t' \in 0\Sigma(E_2) - 0\Sigma(E_1)} (B(p, t') - F(p, t')).$$

Sei nun o.B.d.A. $p \in F(t)$. (Den Fall $p \in B(t)$ behandelt man analog) Da nach Voraussetzung alle Elemente aus $0\Sigma(E_2) - 0\Sigma(E_1)$ nicht benachbart zu t sind, reduziert sich der letzte Term in der Summe zu $\sum_{t' \in 0\Sigma(E_2) - 0\Sigma(E_1)} B(p, t')$. Deshalb gilt:

$M(E_2)(p) \geq M(E_1)(p) = 1$, da $\text{act}(t, M(E_1))$ gilt.

Da eine Markierung nur binäre Werte annehmen kann, folgt $M(E_2)(p) = 1$.

b) Gelte $\text{act}(t, M(E_1))$ sowie $\text{act}(t, M(E_2))$.

Sei $p \in F(t) \cup B(t)$. Dann gilt:

$$M(E_1)(p) = M(E_2)(p) = M(E_1)(p) + \sum_{t' \in T_k} (B(p, t') - F(p, t')).$$

Nach Definition der Schaltregel für strenge Netze ist höchstens einer der im letzten Term der Summe stehenden Summanden ungleich Null. Daher sind in diesem Falle alle Summanden gleich Null, also gilt $\neg \text{aff}(t, t')$ für alle $t' \in T_k$.

5.2.21 Satz: Sei $K \in S/\mathbb{X}$. Dann gilt $K = L(\leq_K)$.

Bew.: " $\subset$ ": trivial nach Definition von $\leq_K$.

" $\supset$ ": Der Beweis dieser Aussage verläuft nach einem Beweisschema, das für die Untersuchung der eigentlichen Nebenläufigkeit von Netzmodellen grundlegende Bedeutung hat. In das Beweisschema ist eine mit "V" bezeichnete Voraussetzung eingebettet, die nur mithilfe der im Schema gegebenen Konstruktionen verstanden werden kann und jedesmal, wenn das Schema angewandt werden soll, gezeigt werden muß. Der zentrale Teil des Beweisschemas ist eine Konstruktion von Folgen aus Schaltsequenzen:

5.2.22 Beweisschema: $E \in S$, $E' \in P(\Sigma)^N$. Gelte $s(E) = s(E')$. Die Voraussetzung V (siehe Beweis) sei erfüllt. Dann gilt $E \mathbb{X} E'$.

Bew.: Es wird eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Schaltsequenzen konstruiert, für die gilt:

- a) $E_n \mathbb{X} E$
- b) $E_n \mid = E' \mid$.

Aus diesen Eigenschaften folgt $\lim_{n \in \mathbb{N}} E_n = E'$ (in X),

wegen b) und $s(E) = s(E')$ und, weil die E_n Schaltsequenzen sind. Aus b) folgt ferner, daß E' Schaltsequenz ist. Damit ist wegen 2.1.8 b) E' als Limes einer Folge von Elementen aus $[E]_{\mathbb{X}}$ (nach a)) in $[E]_{\mathbb{X}}$ enthalten.

Es wird nun die Folgenkonstruktion induktiv angegeben:

$n=0$: $E_0 := E$.

$n+1$: Sei E_n definiert mit $E_n \mid = E' \mid$ und $E_n \mathbb{X} E$.

Da $s(E) = s(E')$ gilt, gilt notwendig:

$$t \in E'(n+1) \text{ m} \bigvee_{n} t \in E_n(m)$$

Sei die Menge I definiert durch:

$I := \{i \mid \bigvee_{t \in E'(n+1)} t \in E_n(i)\}$. I ist möglicherweise unendlich, wenn Σ unendlich ist. E_{n+1} wird nun als Grenzwert einer Folge $(E_{n+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Schaltsequenzen definiert, die wiederum durch Induktion definiert werden. Hierbei ist $I = \{i_0, i_1, \dots, i_k, \dots\}$ die

Anordnung der Menge I nach aufsteigender Größe ihrer Elemente.

$$E_n^0(j) := \begin{cases} E_n(j) & j \leq n \\ \emptyset & j = n+1 \\ E_n(j-1) & j > n+1 \end{cases}$$

$k+1$: Sei E_{n+1}^k definiert. E_{n+1}^{k+1} wird definiert, indem man alle Elemente aus $E'(n+1) \cap E_{n+1}^k(i_k+1)$, zu $E_{n+1}^k(n+1)$ zuschlägt:

$$E_{n+1}^{k+1}(j) := \begin{cases} E_{n+1}^k(j) \cup E'(n+1) & \text{für } j = i_k + 1 \\ E_{n+1}^k(j) \cup (E_{n+1}^k(i_k+1) \cap E'(n+1)) & \text{für } j = n+1 \\ E_{n+1}^k(j) & \text{sonst} \end{cases}$$

V: Es gelte $E_{n+1}^k \sim E_n$ (unter der Voraussetzung, daß $E_n \approx E$ gilt).

Beh: $(E_{n+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert in X .

Bew: Sei zum Beweis dieser Behauptung I unendlich.
(Wenn I endlich ist, ist $(E_{n+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ endlich, da das Verfahren zur Konstruktion von E_{n+1}^k ab $k = |I| + 1$ trivial wird.) Es gilt dann: Die $E_{n+1}^{k+1}(j)$ stimmen überein für

a) $j \leq n \wedge k \in \mathbb{N}$ sowie für b) $n+1 < j < i_\ell + 1$ und $k > \ell$.

Da i_ℓ mit ℓ unbeschränkt wächst, ist also zur Konvergenz von $(E_{n+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in T nur noch die Kon-

vergenz von $(E_{n+1}^k(n+1))_{k \in \mathbb{N}}$ in T_Σ zu zeigen.

Hier gilt aber $(E_{n+1}^k(n+1))_{k \in \mathbb{N}} \not\rightarrow_{T_\Sigma} E'(n+1)$.

Aus der Konvergenz von $(E_{n+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in T und

$s(E_{n+1}^k) = s(E_n)$ folgt nun leicht die Konvergenz von

$(E_{n+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X' . Da X' hausdorffsch ist, ist der

Grenzwert hierbei eindeutig definiert und wird mit E_{n+1} bezeichnet.

Um die Konvergenz von $(E_{n+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen E_{n+1} auch in X nachzuweisen, ist nun nur noch die folgende Behauptung zu zeigen:

Beh: E_{n+1} ist Schaltfolge.

Bew: Angenommen, E_{n+1} sei keine Schaltfolge. Dann

existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\neg \text{act}(E_{n+1}(j+1), M(E_{n+1} j |))$.

Dabei muß gelten $j > n$, da E_n Schaltfolge ist.

$\neg \text{act}(E_{n+1}(j+1), M(E_{n+1} j |))$ kann folgende zwei Fälle bedeuten:

a) $t, t' \in E_{n+1}(j+1) \text{ aff}(t, t')$ oder

b) $t \in E_{n+1}(j+1) \neg \text{act}(t, M(E_{n+1} j |))$.

Der Fall a) ist hier nicht möglich, da andernfalls $k \in \mathbb{N}$ existieren müßte mit $t, t' \in E_{n+1}^k(j+1)$

$\text{aff}(t, t')$, was der Tatsache widerspricht, daß E_{n+1}^k Schaltsequenz ist.

Also ist b) der Fall. Andererseits ist ein solches $t \in E_{n+1}(j+1)$ mit $\neg \text{act}(t, M(E_{n+1} j |))$ in $E_{n+1}^k(j+1)$ für

fast alle $k \in \mathbb{N}$, insbesondere also für fast alle k mit $j+1 < i_k$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $j+1 < i_m$ und

$t \in E_{n+1}^k(j+1)$ für $k \geq m$. Für $k \geq m$ unterscheiden sich die $E_{n+1}^k j |$ nur in der Stelle $n+1$. Nach 5.2.20.a) folgt

$\neg \text{act}(t, M(E_{n+1} j |))$, daß gilt $t \in E_{n+1} \neg \text{act}(t, t')$.

Das aber widerspricht nach 5.2.20.b) der Tatsache daß die E_{n+1}^k Schaltsequenzen sind, da $t' \in E_{n+1}^k(n+1)$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Nach Definition von $*$ gilt damit $E_{n+1} * E_n * E_0 = E$.

Alle Behauptungen des Beweisschemas sind bewiesen.

Die Folgenkonstruktion zum Beweis von $E * E'$ hat den Sinn, E' schrittweise aus dem "Aktionenmaterial" von E aufzubauen. Die Voraussetzung V besagt, daß dieser Konstruktionsprozeß innerhalb der Äquivalenzklasse $[E]_X$ durchgeführt werden kann. Die Topologie X ist gerade so gewählt, daß dieser Konstruktionsprozeß nicht aus $[E]_X$ herausführt. Eine Verfeinerung der Alexandroff-Topologie auf αN bei der Konstruktion der Topologie X würde hier keine Änderung bewirken und wäre deshalb in diesem Zusammenhang auch zugelassen. Jedoch ergibt eine solche Verfeinerung eine Änderung des Konvergenzkriteriums, die nicht immer erwünscht ist.

Im "Schritt" von E_n nach E_{n+1} wird $E'(n+1)$ aus $OE(E)$ korrekt aufgebaut. Dieser Aufbau geschieht durch ein systematisches Absuchen von E_n nach Elementen aus $E'(n+1)$, die durch die Folge $(E_{n+1}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ an der $n+1$ -ten Stelle gesammelt werden.

Fortsetzung des Beweises von 5.2.21: Sei $E \in S$ und

E' Sequentialisierung von $[E]_X$. Zu zeigen ist

$E * E'$. Dazu wird 5.2.22. angewandt. Der Beweis reduziert sich damit auf den Beweis der Voraussetzung V in 5.2.22

Zunächst gilt trivial $E_{n+1}^0 \sim E_n$, da $\leq_{n+1}^0 = \leq_n$ ist.

Für $k > 0$ gilt:

Beh: $n+1 \leq j \leq i_k \wedge t' \in E_{n+1}^k(j) \Rightarrow t' \notin E'(n+1)$.

Das wird leicht durch Induktion über k gezeigt:

$k=1$: Die Behauptung ergibt sich aus der Minimalität von i_1 in I .

$k+1$: Die Behauptung ergibt sich aus der Definition von E_{n+1}^{k+1} und der Minimalität von i_{k+1} in der Menge

$I - \{i_1, \dots, i_k\}$.

Sei nun $t \in E_{n+1}^k(i_{k+1}) \cap E'(n+1)$. Für $t' \in E_{n+1}^k(j)$ mit $n+1 \leq j \leq i_k$ gilt offenbar $t \leq_{E_{n+1}^k} t' \wedge t' \leq_{E'} t$, also

t, t' nicht abhängig in $\leq_{[E]_X}$, da E_{n+1}^k und E'

Sequentialisierungen von $\leq_{[E]_X}$ sind.

Damit hat E_{n+1}^k das folgende Aussehen:

$$E_{n+1}^k = E'(0), \dots, E'(n), E_{n+1}^k(n+1), \dots, T := E_{n+1}^k(i_k), E_n(i_{k+1}), \dots$$

Hierbei ist $E_n(i_k) = T_1 \cup T_2$, wobei

$$T_1 = E_n(i_k) \cap E'(n+1) \text{ und } T_2 = E_n(i_k) - T_1.$$

Nach der oben bewiesenen Behauptung ist $T_1 \cup T$ offenbar eine Menge in $\leq_{[E]_X}$ paarweise unabhängiger Elemente von $O\hat{S}(E)$. Aufgrund von Lemma 5.2.19 existiert für $t_1, t_2 \in T \cup T_1$ eine Schaltfolge, die t_1 und t_2 gleichzeitig schalten. Damit haben nach Definition 5.2.18 die Schaltregel für strenge Netze t_1 und t_2 keine gemeinsamen Randstellen in N und die Folge $T, T_1 \cup T_2$ in der Schaltsequenz E_{n+1}^k läßt sich "in $\sim$ " wie folgt

transformieren:

$$T, T_1 \cup T_2 \leftrightarrow T, T_1, T_2 \leftrightarrow T \cup T_1, T_2.$$

Durch i_k -n derartige Transformationen läßt sich

E_{n+1}^k in E_{n+1}^{k+1} "in $\sim$ " transformieren. Damit ist

$E_{n+1}^k \sim E_{n+1}^{k+1}$ nachgewiesen und daraus folgt leicht die

Voraussetzung V. Nach dem Beweisschema 5.2.22 ist

$$E \sim E'.$$

5.2.23 Lemma: Sei $K \in S/\mathbb{K}$. Sei $\leq$ Ordnung auf $O\Sigma(K)$ mit $\leq_K \leq$.

Dann existiert eine Sequentialisierung von $\leq$, die keine Schaltsequenz von N ist.

Bew.: Seien $t, t' \in O\Sigma(K)$ mit $t <_K t' \wedge \neg t < t'$. Dann sind

t, t' unabhängig in $\leq$. O.B.d.A. seien t, t' benachbart in $\leq_K$. (Sonst läßt sich eine totalgeordnete Teilmenge $A \subset O\Sigma(K)$ finden mit $A = \{t_1, \dots, t_n\}$ und $t = t_1 <_K \dots <_K t_n = t'$ sowie t_{i-1}, t_i benachbart in $\leq_K$ für $i \leq n$. Man wählt z.B. eine totalgeordnete Menge A' mit $t \leq A' < t'$ und $|A'| = d(t, t')$. $d(t, t')$ ist endlich, da $\leq_K$ Treppennordnung ist. Sodann wählt man $A := A' \cup \{t\}$.

Da $\neg t < t'$ gilt, existiert ein $i \leq n$ mit $\neg t_{i-1} < t_i$.)

Nach Lemma 2.2.17 existiert eine Sequentialisierung E von $\leq_K$, die folgendes Aussehen hat:

$$E = T_0, \dots, T_k, \{t\}, \{t'\}, T_{k+3}, \dots$$

Nach Satz 5.2.21 ist E Schaltsequenz. Da t, t' unabhängig in $\leq \leq_K$ sind, ist

$$E' := T_0, \dots, T_k, \{t, t'\}, T_{k+3}, \dots$$

Sequentialisierung von $\leq$. E' kann aber keine Schaltsequenz sein, da sonst $E' \rightarrow E$ gelten würde, also nach 5.2.21 E' auch Sequentialisierung von $\leq_K$ wäre, was $t <_K t'$ widerspricht.

5.2.24 Lemma: Sei $K \in S/\mathbb{K}$, $E \in K$. Dann gilt $\leq_{[E]_{\sim}} \leq [E]_{\sim}$.

Bew.: Es gilt zunächst $\leq_{[E]_{\sim}} \leq [E]_{\sim}$. Zum Beweis der

Rückrichtung seien t, t' unabhängig in $\leq_K$.

Es gilt $\pi_{O\Sigma(K)} \sim |_{K^2}$, denn es gilt

$$+ |_{K^2} \sim \lambda_{O\Sigma(K)} |_{L(\leq_K)^2}.$$

Nach Lemma 2.2.17 läßt sich eine Schaltfolge $E' \in E$ finden, die t und t' gleichzeitig schaltet. Nach der obigen Bemerkung beinhaltet die Aussage von 2.2.17 ferner, daß für eine solche Schaltfolge auch gelten kann $E' \sim E$. Damit sind t, t' unabhängig in $\leq_{[E]_{\sim}}$ und die

Rückrichtung ist gezeigt.

5.2.25 Satz: $S/\approx$ ist präfixabgeschlossen (siehe 4.3.1),
d.h.: Sei $K \in S/\approx$ sowie $(L, \leq) < (O\Sigma(K), \leq_K)$. Dann
gilt: $L(L, \leq) \in S/\approx$.

Bew.: Der Beweis wird in zwei Schritten geführt.

In 1.) wird gezeigt, daß $L(\leq)$ eine Teilmenge von S ist. In 2.) wird die Existenz eines $\tilde{E} \in L(\leq)$ nachgewiesen, für das gilt $E' \sim \tilde{E} \Rightarrow E' \in L(\leq)$.
Daraus folgt $L(\leq) \supset [\tilde{E}]_{\sim}$ also $\leq \leq_{L(\leq)} \leq [\tilde{E}]_{\sim} = \leq [\tilde{E}]_{\times}$
(nach 2.2.18, 2.2.19 und 5.2.24). Nach 5.2.23
gilt damit wegen $L(\leq) \subset S$ auch $\leq \leq [\tilde{E}]_{\times}$ also
 $L(\leq) = L(\leq_{[\tilde{E}]_{\times}}) = [\tilde{E}]_{\times}$. Damit ist $L(L, \leq) \notin S/\approx$ gezeigt.

1.) Sei $E \in L(\leq)$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Gezeigt wird: $E|_n$
ist Schaltsequenz: Da $E \in L(\leq)$ gilt, gilt $(O\Sigma(E|_n), \leq) < (L, \leq) < (O\Sigma(K), \leq_K)$. Als endliche Sequentialisierung
eines Präfixes von $(O\Sigma(K), \leq_K)$ ist $E|_n$ somit nach
2.2.22 zu einer Sequentialisierung von $\leq_K$ fortsetz-
bar, die nach 5.2.21 Schaltsequenz ist. Also ist
 $E|_n$ selbst Schaltsequenz.

2.) Sei $E^K \in L(\leq_K)$ beliebig sowie $E(n) := E^K(n) \cap L$.

Dann gilt $E \in L(\leq)$. Die Behauptung wird für $\tilde{E} = E$ ge-
zeigt: Sei dazu zunächst $E' \rightarrow E$ für $E' \in L(\leq)$ angenommen

$$E = (E(n))_{n \in \mathbb{N}}, \quad E^K = (E(n) \dot{\cup} T_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad E' = (E'(n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Hierbei ist o.B.d.A. $E'(n) = \bigcup_{k_n \leq j \leq l_n} E'(j)$, wobei

gilt: $l_n \geq k_n - 1$, evtl. $l_n = \infty$, $E'(n) = \emptyset$, wenn $l_n = k_n - 1$, $k_0 = 0$
sowie $k_{n+1} = l_n + 1$, und k_n wächst mit n unbeschränkt.

Dann wird definiert:

$$E'^K := (E'(n) \dot{\cup} T_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}, \text{ wobei } j_n \text{ induktiv über } n$$

definiert ist durch:

$$j_n := \begin{cases} m := \max\{j_q \mid q < n\} + 1 & \text{falls } n > 0 \text{ und } m < k_n \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(T_{-1} := \emptyset)$$

Mit 5.2.22 wird gezeigt, daß $E'^K \in E^K$ gilt:

Dazu ist die Gültigkeit der Voraussetzung V zu
zeigen. Diese gilt, da die Transformation von E_n^k

nach E_{n+1}^k in diesem speziellen Fall einem Zurück-schieben von $a) T_{j_{n+1}}$ über lediglich leere Glieder (wegen $T_{j_{n+1}} \neq \emptyset \Rightarrow j_{n+1} \leq k_{n+1}$) sowie von $b) E(j)$ für $k_n \leq j \leq k_n$ über Glieder der Form T_n ($n < j$) entspricht. Daher gilt $E' \in L(\leq_K)$, also $E' \in L(\leq)$.

Für $E' \sim E$ folgt die Annahme induktiv über die Länge des Transformationsweges von E' nach E .

5.2.26 Satz: $S/\sim$ ist durch $<$ induktiv geordnet.

Bew.: Sei $\{K_i \mid i \in I\}$ in $<$ totalgeordnete Teilmenge von $S/\sim$. Sei $K := \bigcup_{i \in I} O\Sigma(K_i)$, $\leq_K := \bigcup_{i \in I} \leq_{K_i}$. Zu zeigen ist $L(K, \leq_K) \in S/\sim$. Denn dann ist $L(K, \leq_K)$ offenbar Supremum der Menge $\{K_i \mid i \in I\}$, da gilt $K_i < L(K, \leq_K)$ für $i \in I$. (Bew: Offenbar gilt nach Definition von $(K, \leq_K)$ $O\Sigma(K_i) \subset K$ und $\leq_{K_i} = \leq_K \upharpoonright_{K_i}$. Sei nun $t \leq_K t_1$ mit $t_1 \in O\Sigma(K_i)$ und $t \in K$. Dann gilt $t, t_1 \in O\Sigma(K_j)$ für ein $j \in I$ sowie entweder 1) $K_j < K_i$ oder 2) $K_i < K_j$. Ist 1) der Fall, so gilt $t \in O\Sigma(K_j) \subset O\Sigma(K_i)$. Ist 2) der Fall, so gilt $t \in O\Sigma(K_i)$ nach 2.2.20 c).

Beh: $L(K, \leq_K) \in S/\sim$.

Bew: $\leq_K$ ist Treppenordnung, da $h_{\leq_K}(t) = h_{\leq_{K_i}}(t)$ gilt, falls $t \in O\Sigma(K_i)$ ist.

Es wird das Beweisprinzip von 5.2.25 übernommen.

1) Gezeigt wird: $E \in L(K, \leq_K) \Rightarrow E$ ist Schaltsequenz.

Dies geschieht wieder mittels der Präfixe von E .

Sei $E \upharpoonright_{K_i}(n) := E(n) \cap O\Sigma(K_i)$. Sei induktiv angenommen,

daß $E \upharpoonright_n$ Schaltsequenz ist. $E \upharpoonright_{n+1} \upharpoonright_{K_i}$ ist Sequentialisierung von $\leq_{K_i}$, da $K_i < L(K, \leq_K)$.

Damit ist $E \upharpoonright_{n+1} \upharpoonright_{K_i}$ nach 5.2.21 Schaltsequenz. Seien

$t_1, t_2 \in E(n+1)$. Dann gilt $t_1, t_2 \in O\Sigma(K_j)$ für ein $j \in I$,

also $t_1, t_2 \in E(n+1) \cap O\Sigma(K_j)$, und, da $E \upharpoonright_{n+1} \upharpoonright_{K_j}$ Schalt-

sequenz ist, gilt $\neg \text{aff}(t_1, t_2)$. Sei ferner $t \in E(n+1)$. Dann ist $t \in O\Sigma(K_j)$ für ein $j \in I$, und für $t' \in E(m) - O\Sigma(K_j)$ gilt für $m \leq n$ $\neg \text{aff}(t, t')$: Denn da $t' \notin O\Sigma(K_j)$ gilt, gilt $t' \notin O\Sigma(K_\ell)$ mit $K_\ell \neq K_j$, also $\neg t' <_{K_\ell} t$. Aber es gilt: $i_{E_{n+1} \parallel K_\ell}(t') \leq i_{E_{n+1} \parallel K_\ell}(t)$. Also sind t, t' unabhängig in $\leq_{K_\ell}$, woraus $\neg \text{aff}(t, t')$ folgt. Die Anwendung von 5.2.20 a) auf E_n und $E_n \parallel K_j$ ergibt die gewünschte Behauptung.

2.) Gezeigt wird für $E \in L(\leq_K)$: $E' \rightarrow E \Rightarrow E' \in L(\leq_K)$.

$$E \leftarrow E' \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} E|_{K_i} \leftarrow E'|_{K_i} \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} E'|_{K_i} \in K_i.$$

Damit gilt $E' \in L(K, \leq_K)$, denn:

$$\begin{aligned} t_1 \leq_K t_2 &\Rightarrow \bigwedge_{i \in I} t_1, t_2 \in O\Sigma(K_i) \wedge t_1 \leq_{K_i} t_2 \Rightarrow t_1 \leq_{E|_{K_i}} t_2 \\ &\Rightarrow t_1 \leq_E t_2. \end{aligned}$$

5.2.27 Satz: Die Äquivalenzrelation $\approx$ auf S erfüllt die Bedingung 5.1.

Bew.: a) $\approx$ ist Ablaufbegriff auf S :

4.3.1.a) wird mit 5.2.21 gezeigt.

4.3.1.b) wird mit 5.2.25 gezeigt.

4.3.1.c) wird mit 5.2.26 gezeigt.

b) Nach Konstruktion von $\approx$ und allen über $\approx$ bewiesenen Sätzen sind die Ablaufstrategien Ordnungen.

Die Eindeutigkeit von $\approx$ als 5.1 erfüllende Äquivalenzrelation liefert der folgende Satz.

5.2.28 Satz: Sei π eine Äquivalenzrelation auf S , für die gilt: $K \in S/\pi \Rightarrow K = L(\leq_K)$. Dann gilt $\pi = \approx$.

Bew.: Offenbar gilt $\pi \supseteq \sim$, also für alle $E \in S$

$$\leq_{[E]_\pi} \subseteq \leq_{[E]_\sim} = \leq_{[E]_\approx}.$$

$$\leq_{[E]_\pi} = \leq_{[E]_\approx}, \text{ da } L(\leq_{[E]_\pi}) = [E]_\pi \in S \text{ ist. Daraus folgt}$$

$$[E]_\pi = L(\leq_{[E]_\pi}) = L(\leq_{[E]_\approx}) = [E]_\approx, \text{ also } \pi = \approx.$$

Das Modell der strengen Netze führt nach den obigen Betrachtungen zu einem Ablaufbegriff, dessen Kausalitätsstruktur auf Ordnungsrelationen fundiert und der durch diese Eigenschaft eindeutig festgelegt ist. Der folgende Satz liefert noch eine stärkere Aussage.

5.2.29 Satz: π ist der feinste Ablaufbegriff auf S (siehe Definition 4.3.8).

Bew.: Sei π Ablaufbegriff, der feiner ist als π . Nach Lemma 4.3.2 und Def 4.3.6 ist T_π ebenfalls eine Menge von Ordnungen. π erfüllt also 5.1 und aus 5.2.28 folgt $\pi = \pi$.

5.2.30 Def.: (N, M) sei markiertes Netz. Sei Σ^{act} definiert als $\Sigma^{\text{act}} := \{t \in \Sigma \mid \bigvee_{E \in S} \bigvee_{n \in N} t \in E(n)\} = \{t \in \Sigma \mid \bigvee_{M' \in [M]} \text{act}(t, M')\}$. Das Tripel $(\Sigma^{\text{act}}, S, \pi)$ heißt die VON (N, M) INDUZIERTER oder die (N, M) UNTERLIEGENDE Nebenläufigkeitsstruktur.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wird der Ablaufbegriff π in einer anschaulichen Weise dargestellt.

5.2.31 Def.: a) Sei $E \in S$, $x \in O\Sigma(E)$. $M_E(x)$ bezeichnet die Menge aller Aktionen vor x in E , die auf einer Randstelle der Transition von x als letzte Aktionen vor x agieren.
b) Die Abbildung $M: S \rightarrow P(\Sigma \times N \times P(\Sigma \times N))$ ordnet jeder Schaltsequenz $E \in S$ die Menge $\{(x, M_E(x)) \mid x \in O\Sigma(E)\}$ zu.
c) Sei π die Inzidenzrelation der Abbildung M auf S .
($E \pi E' : \Leftrightarrow M(E) = M(E')$).

5.2.32 Satz: $\pi = \pi$.

Beweis: " $\supset$ ": Offenbar ist $\pi \subset \pi$ also $\pi \subset \pi$. Sei nun $E \neq E'$. Induktiv wird $M(E_n) = M(E)$ bewiesen, wobei E_n wie in 5.2.22 definiert ist. Wegen $|E_n| = |E|$ folgt dann $M(E) = M(E')$. Sei also induktiv angenommen, daß $M(E_n) = M(E')$. Wegen $E_{n+1}^k \sim E_n$ gilt auch $M(E_{n+1}^k) = M(E_n) = M(E)$. Da für jedes $x \in O\Sigma(E)$, etwa $x \in E_n(j)$ ein $k \in N$ existiert,

sodaß E_{n+1}^k und E_{n+1} sich nur im $n+1$ -ten Glied unterscheiden und da im Verlaufe der Transformation von E_n nach E_{n+1} nur Aktionen über x hinweg zum $n+1$ -ten Glied transportiert werden, die von x unabhängig also nicht mit x benachbart sind, gilt $M_{E_{n+1}}^k(x) = M_{E_{n+1}}(x)$. Also gilt $M(E_{n+1}) = M(E_n) = M(E)$.

"c" Der Beweis erfolgt wieder mithilfe des Schemas 5.2.22. Der Schritt von E_{n+1}^k nach E_{n+1}^{k+1} ist hier sehr einfach zu führen, da nach Definition von M alle bei der Transformation der Aktion x an die Stelle $n+1$ überstrichenen Aktionen nicht mit x benachbart sein können. Unter Verwendung von "5" kann nämlich induktiv angenommen werden, daß $E_{n+1}^k \times E$ also $M(E_{n+1}^k) = M(E) = M(E')$ gilt.

6. Strenge Netze als Mittel zur Darstellung von Systemverhalten

In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Bedingungen verschiedene strenge Netze dieselbe unterliegende Nebenläufigkeitsstruktur besitzen und für welche Nebenläufigkeitsstrukturen strenge Netze existieren, die sie induzieren.

Offenbar induzieren nach Definition der einem strengen Netz unterliegenden Nebenläufigkeitsstruktur genau die Netze dieselbe Nebenläufigkeitsstruktur, die dieselben Schaltsequenzen haben. Die Relation $\approx$ wurde in 5.2.16 nämlich nur in expliziter Abhängigkeit von der Menge der Schaltsequenzen eines strengen Netzes definiert, ohne daß darüber hinausgehende Netzstrukturen eine Rolle spielten. Das folgende Lemma zeigt, daß man sich bei Vergleichen strenger Netze hinsichtlich ihrer unterliegenden Nebenläufigkeitsstrukturen sogar auf die Betrachtung ihrer endlichen Schaltsequenzen beschränken kann.

6.1 Def.: Ω sei Schaltmenge. Die Menge der endlichen Schaltsequenzen von Ω wird mit Ω^e bezeichnet.

6.2 Lemma: Für zwei Schaltmengen Ω_1, Ω_2 über Σ gilt:
 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \iff \Omega_1^e \subset \Omega_2^e$.

Bew.: " $\Leftarrow$ ": trivial.

" $\Rightarrow$ ": Offenbar ist jede Schaltmenge Ω über Σ der Abschluß von Ω^e in der Topologie $\prod_{n \in \mathbb{N}} D_{\{0,1\}}$ (wegen 4.2.1.a,b).

Durch eine Einschränkung der Klasse der strengen Netze mithilfe einer Normalitätsbedingung werden Netze von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen, die Strukturen aufweisen, die nicht mit der unterliegenden Nebenläufigkeitsstruktur in Zusammenhang stehen. Jedem

Netz wird dann ein "normales" Netz zugeordnet, das durch Elimination dieser Strukturen entsteht und dieselbe Nebenläufigkeitsstruktur induziert.

Zunächst wird eine allgemeine Aussage über Zuordnungen zwischen Netzen gemacht.

6.3 Lemma: ~ sei eine Zuordnung zwischen Netzen, die dem Netz N das Netz $\tilde{N}$ und der Markierung M von N die Markierung $\tilde{M}$ von $\tilde{N}$ zuordnet. Ferner gelte $\Sigma_N^{\text{act}} = \Sigma_{\tilde{N}}^{\text{act}} =: \Sigma^{\text{act}}$.

Dann gilt:

$$M', M'' \in [M] \quad T \in \Sigma^{\text{act}} \quad M'[T > M'' \stackrel{<=>}{=} \tilde{M}'[T > \tilde{M}'' \quad \Rightarrow \quad S_N \stackrel{25}{=} S_{\tilde{N}}.$$

Bew.: Nach 6.2 ist die Aussage nur für $S_N^e, S_{\tilde{N}}^e$ zu zeigen.

Dies folgt aber durch eine einfache Induktion über die Höhe der Schaltsequenzen.

6.4 Def.: Ein markiertes Netz (N, M) heißt NORMAL, wenn gilt:

- a) $p, p' \in \Pi \quad F(p) = F(p') \wedge B(p) = B(p') \Rightarrow p = p'$
- b) $\Sigma^{\text{act}} = \Sigma$
- c) $p \in \Pi \quad F(p) \cup B(p) \neq \emptyset$.

6.5 Def.: Die Zuordnung ~ zwischen Netzen sei wie folgt definiert. (Hierbei sei N Netz, M Markierung von N.)

$$B := \{p \in \Pi \mid (F(p) \cup B(p)) \cap \Sigma^{\text{act}} \neq \emptyset\}$$

$$p_1, p_2 \in B \quad p_1 \sim p_2 : \Leftrightarrow F(p_1) = F(p_2) \wedge B(p_1) = B(p_2)$$

$$p \in B \quad \tilde{p} := [p]_{\sim}, \quad t \in \Sigma^{\text{act}} \quad \tilde{t} := t$$

$\tilde{N}$ sei definiert durch:

$$\Sigma_{\tilde{N}} := \tilde{\Sigma} := \{\tilde{t} \mid t \in \Sigma^{\text{act}}\} = \Sigma^{\text{act}}$$

$$\Pi_{\tilde{N}} := \tilde{\Pi} := \{\tilde{p} \mid p \in B\} = B / \sim$$

$$t \in \Sigma^{\text{act}} \quad p \in B \quad F_{\tilde{N}}(\tilde{p}, \tilde{t}) := \tilde{F}(\tilde{p}, \tilde{t}) := F(p, t)$$

$$B_{\tilde{N}}(\tilde{p}, \tilde{t}) := \tilde{B}(\tilde{p}, \tilde{t}) := B(p, t)$$

$\tilde{M}$ sei definiert durch:

$$p \in B \quad \tilde{M}(\tilde{p}) := M(p).$$

~ heißt NORMALISIERUNG, $(\tilde{N}, \tilde{M})$ heißt NORMALISIERUNG von (N, M) .

6.6 Bem.: Nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ sind $\tilde{F}$ und $\tilde{B}$ wohldefiniert. Nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ und der Menge B ist auch $\tilde{M}$ wohldefiniert. Wäre nämlich $M(p_1) \neq M(p_2)$ sowie $p_1 \sim p_2$, so wäre keine Transition aus $F(p_1) \cup B(p_1)$ bei einer von M aus erreichbaren Markierung aktivierbar, also würde $p_1 \notin B$ gelten.

6.7 Satz: (N, M) sei markiertes Netz. Dann ist $(\tilde{N}, \tilde{M})$ normal.

Bew.: Es werden nacheinander die drei in 6.4 gegebenen Kriterien für Normalität untersucht:

a) Sei $\tilde{p}_1 \neq \tilde{p}_2 \wedge \tilde{F}(\tilde{p}_1) = \tilde{F}(\tilde{p}_2) \wedge \tilde{B}(\tilde{p}_1) = \tilde{B}(\tilde{p}_2)$. Dann gilt $F(p_1) = F(p_2) \wedge B(p_1) = B(p_2) \wedge p_1 \sim p_2$. Das ist ein Widerspruch zur Definition der Äquivalenzrelation $\sim$.

b) wird durch das folgende Lemma bewiesen.

c) trivial nach Definition von B .

6.8 Lemma: Die Normalisierung $\sim$ erfüllt die Prämisse der Aussage von Lemma 6.3 in beiden Richtungen.

Bew.: Zunächst wird gezeigt, daß gilt:

$$M' \in [M] \quad t \in \Sigma^{\text{act}} \quad \text{act}(t, M') \Leftrightarrow \text{act}(\tilde{t}, \tilde{M}').$$

$$\text{Bew.: } \text{act}(t, M') \Leftrightarrow \bigwedge_{p \in F(t)} M'(p) = 1 \wedge \bigwedge_{p \in B(t)} M'(p) = 0$$

(wegen $t \in \Sigma^{\text{act}}$ gilt $F(t) \cap B = F(t)$ und $B(t) \cap B = B(t)$, also)

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{p \in F(t) \cap B} M'(p) = 1 \wedge \bigwedge_{p \in B(t) \cap B} M'(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{p \in \tilde{F}(\tilde{t})} \tilde{M}'(\tilde{p}) = 1 \wedge \bigwedge_{p \in \tilde{B}(\tilde{t})} \tilde{M}'(\tilde{p}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{act}(\tilde{t}, \tilde{M}').$$

Ferner gilt $\text{aff}(t_1, t_2) \Leftrightarrow \text{aff}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$, also auch

$$M' \in [M] \quad T \in \Sigma^{\text{act}} \quad \text{act}(T, M') \Leftrightarrow \text{act}(\tilde{T}, \tilde{M}'). \quad (\tilde{T} := \{\tilde{t} \mid t \in T\})$$

In analoger Weise kann man mithilfe der Definition von $\tilde{N}$ zeigen, daß beim Schalten aktivierter Transitionenmengen in N und $\tilde{N}$ äquivalente Markierungstransformationen vorgenommen werden:

$$M'[T > M''] \Leftrightarrow \text{act}(T, M') \wedge \bigwedge_{p \in F(T)} M''(p) = 0 \wedge \bigwedge_{p \in B(T)} M''(p) = 1$$

$$\begin{aligned}
 & \wedge p \in F(T) \cup B(T) \quad M''(p) = M'(p) \\
 & \Leftrightarrow \text{act}(\tilde{T}, \tilde{M}') \wedge \tilde{p} \in \tilde{F}(\tilde{T}) \quad \tilde{M}''(\tilde{p}) = 0 \wedge \tilde{p} \in \tilde{B}(\tilde{T}) \quad \tilde{M}''(\tilde{p}) = 1 \\
 & \wedge \tilde{p} \in \tilde{F}(\tilde{T}) \cup \tilde{B}(\tilde{T}) \quad \tilde{M}''(\tilde{p}) = \tilde{M}'(\tilde{p}) \\
 & \Leftrightarrow \tilde{M}'[\tilde{T} > \tilde{M}''] \quad .
 \end{aligned}$$

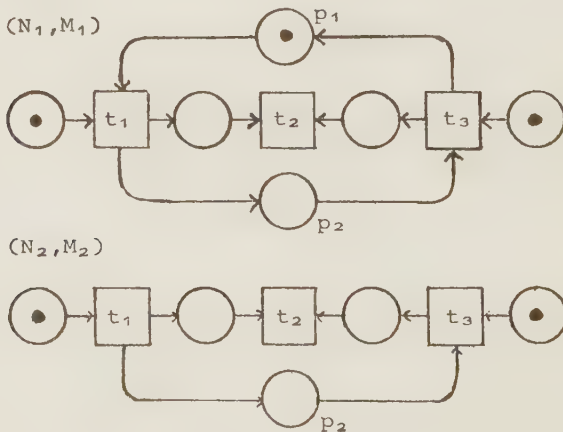
6.9 Satz: (N, M) sei markiertes Netz, $(\tilde{N}, \tilde{M})$ sei die Normalisierung von (N, M) . Dann gilt $S_N = S_{\tilde{N}}$.

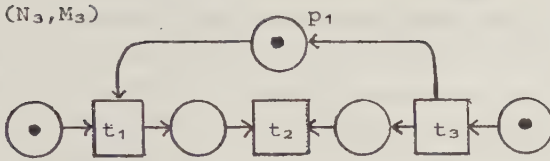
Bew.: Anwendung von 6.3

6.10 Bem.: Die Normalisierung ist eine Projektion. Für normale Netze (N, M) gilt nämlich $(\tilde{N}, \tilde{M}) = (N, M)$.
 $(B = \Pi, \sim = \Delta)$

Nach 6.9 bedeutet die Beschränkung der Betrachtungen unterliegender Nebenläufigkeitsstrukturen auf normale Netze keine Einschränkung der Allgemeinheit. Jedoch liefert die Normalisierung allein noch kein "ausgezeichnetes" Netz aus der Klasse aller Netze mit gleicher unterliegender Nebenläufigkeitsstruktur. Wie das folgende Beispiel zeigt, existieren nämlich verschiedene normale Netze mit gleichen unterliegenden Nebenläufigkeitsstrukturen (nämlich mit gleichen Schaltsequenzen).

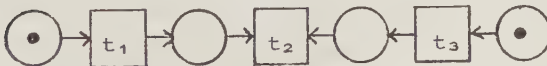
6.11 Beispiel:





Die drei hier angegebenen Netze haben dieselben Schaltsequenzen. Das liegt offenbar daran, daß die Stellen p_1 und p_2 einzeln nichts zur Ablaufsteuerung von (N_1, M_1) beitragen. Derartige Stellen seien ÜBERFLÜSSIG genannt. Die Idee, durch Elimination überflüssiger Stellen zu einem "minimalen" Netz zu gelangen, ohne die Schaltsequenzenmenge zu verändern, erweist sich als undurchführbar. In (N_1, M_1) sind nämlich p_1 und p_2 überflüssig, d.h. einzeln vernachlässigbar. Werden jedoch beide Stellen aus (N_1, M_1) eliminiert, so erhält man das folgende Netz, dessen Schaltsequenzenmenge nicht mit der von (N_1, M_1) übereinstimmt.

(N_4, M_4)



$\{t_1, t_3\}$ ist Schaltsequenz von (N_4, M_4) aber von keinem der übrigen drei Netze.

Wie in 6.11 ausgeführt führt eine Vergrößerung von strengen Netzen durch Elimination überflüssiger Stellen zu keinem ausgezeichneten minimalen Netz mit einer vorgegebenen Menge von Schaltsequenzen.

Die folgenden Ausführungen werden zeigen, daß man durch eine Verfeinerung von strengen Netzen durch Auffüllen mit überflüssigen Stellen zu einem ausgezeichneten feinsten Netz mit einer vorgegebenen Menge von Schaltsequenzen kommt. Die Konstruktion dieses

Netzes basiert (wie die Konstruktion der einem Netz unterliegenden Nebenläufigkeitsstruktur) lediglich auf der Menge der Schaltsequenzen und benötigt keine darüber hinausgehenden Netzstrukturen. Man gelangt also durch diesen Verfeinerungsprozeß von jedem Netz (N, M) mit $S_{(N, M)} = \Omega$ zu dem (nun in der Klasse aller Netze (N, M) mit $S_{(N, M)} = \Omega$ eindeutig ausgezeichneten) Netz (N_Ω, M_Ω) . Darüberhinaus kann für eine beliebige Schaltmenge durch Prüfen der Durchführbarkeit des oben erwähnten Konstruktionsvorgangs entschieden werden, ob ein Netz existiert, dessen Schaltsequenzmenge mit der Schaltmenge übereinstimmt. Diese Ergebnisse liefern die folgenden Untersuchungen.

6.12 Def.: Ω sei Schaltmenge auf Σ , $T_1, T_2 \subset \Sigma$. (T_1, T_2) heißt (STELLEN)ERZEUGEND, wenn $p(T_1, T_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} p(T_1, T_2) : \Leftrightarrow & \bigwedge_{E \in \Omega} \left(\bigwedge_{n \in N} \bigwedge_{m > n} (|E(n) \cap (T_1 \cup T_2)| \leq 1 \wedge \right. \\ & (E(m) \cap T_1 \neq \emptyset \Rightarrow E(n) \cap T_1 = \emptyset) \wedge \\ & \bigvee_{k \in N} n < k < m \wedge E(k) \cap T_2 \neq \emptyset) \wedge \\ & (E(m) \cap T_2 \neq \emptyset \Rightarrow E(n) \cap T_2 = \emptyset) \wedge \\ & \bigvee_{k \in N} n < k < m \wedge E(k) \cap T_1 \neq \emptyset) \bigg) \wedge \\ & \bigvee_{n \in N} (E(n) \cap T_1 \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{m \leq n} E(m) \cap T_2 = \emptyset) \end{aligned}$$

6.13 Bem.: $p(T_1, T_2)$ ist genau dann erfüllt, wenn sich in jeder Schaltsequenz aus Ω Elemente aus T_1 bei wachsenden Indizes mit Elementen aus T_2 abwechseln, wobei mit einem Element aus T_1 begonnen wird.

Nun wird jeder Schaltmenge mithilfe des in 6.12 definierten Prädikats ein markiertes Netz zugeordnet. Dabei erzeugt jedes Paar (T_1, T_2) , für das $p(T_1, T_2)$ gilt, eine belegte und eine unbelegte Stelle.

6.14 Def.: Ω sei Schaltmenge über Σ . Das markierte Netz (N_Ω, M_Ω) wird definiert wie folgt:

$$\Sigma_{N_{\Omega}} := \Sigma; \Pi_{N_{\Omega}} := \{(T_1, T_2) | p(T_1, T_2)\} \cup \{(T_2, T_1) | p(T_1, T_2)\};$$

Gelte $p(T_1, T_2)$ sowie $t \in \Sigma$.

$$F_{N_{\Omega}}((T_1, T_2), t) := B_{N_{\Omega}}((T_2, T_1), t) := \begin{cases} 1 & t \in T_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases};$$

$$B_{N_{\Omega}}((T_1, T_2), t) := B_{N_{\Omega}}((T_2, T_1), t) := \begin{cases} 1 & t \in T_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases};$$

$$M_{\Omega}((T_1, T_2)) := 0; M_{\Omega}((T_2, T_1)) := 1.$$

6.15 Satz: Ω sei Schaltmenge über Σ . Dann gilt:

a) $\Omega \subset S_{(N_{\Omega}, M_{\Omega})}$

b) (N_{Ω}, M_{Ω}) ist normal (mit Transitionenmenge Σ)

c) Sei (N, M) normal mit $\Omega \subset S_{(N, M)}$ (also insbesondere mit der Transitionenmenge Σ). Dann entsteht (N, M) durch Elimination gewisser Stellen aus N_{Ω} . Das heißt:

$$\text{Es existiert } S \subset \Pi_{N_{\Omega}} \text{ mit: } \Pi_N = \Pi_{N_{\Omega}} \upharpoonright S; F_N = F_{N_{\Omega}} \upharpoonright \Pi_N \times \Sigma_N$$

$$B_N = B_{N_{\Omega}} \upharpoonright \Pi_N \times \Sigma_N; M_N = M_{\Omega} \upharpoonright \Pi_N.$$

Bew.: a) Durch Induktion über die Höhe von $E \in \Omega$ wird gezeigt, daß aus $E \in \Omega$ folgt: $E \in S_N$ und für $T_1, T_2 \subset \Sigma$

mit $p(T_1, T_2)$ sowie $M_{\Omega}[E > M'_{\Omega}]$ gilt:

$$1 \neq M'_{\Omega}((T_2, T_1)) = M'_{\Omega}((T_1, T_2)) = 0, \text{ falls in } E$$

kein Element aus $T_1 \cup T_2$ schaltet oder das Element t aus $T_1 \cup T_2$ mit höchstem Index $i_E(t)$ in T_2 liegt;
1 falls das Element t aus $T_1 \cup T_2$ mit höchstem Index $i_E(t)$ in T_1 liegt).

$n=1$: $E = \Lambda$. Die Behauptung gilt trivial nach Definition von M .

$n+1$: Sei $E' := E, T \in \Omega, E \in \Omega, T \subset \Sigma$. E habe die Höhe n .
Zu zeigen ist $\text{act}(T, M_{\Omega}^n)$, wobei $M_{\Omega}[E > M_{\Omega}^n]$. Seien dazu $t_1, t_2 \in T$. Dann existiert kein Paar T_1, T_2 mit $p(T_1, T_2)$ und $t_1, t_2 \in T_1 \cup T_2$ (nach Definition von p).

Da $t \in T$ nur mit solchen Stellen (T_1, T_2) aus N_Ω verbunden ist, für die gilt $t \in T_1 \cup T_2$ (siehe Def. 6.1) sind die $t_1, t_2 \in T$ also nicht benachbart in N_Ω . Sei nun $t \in T$, $p(T_1, T_2)$. Nach Definition von F_{N_Ω} gilt $F_{N_\Omega}((T_1, T_2), t) = 1 \Rightarrow t \in T_2$. Nach Definition von p (Def. 6.12) gilt für das größte $k < n$ mit $E(k) \cap (T_1, T_2) \neq \emptyset$: $E(k) \cap T_1 \neq \emptyset$ (ein solches k existiert nach Def. von p) und somit $M_\Omega^n((T_1, T_2)) = 1$.

nach Induktionsannahme. Entsprechend weist man die korrekte Markierung aller Randstellen von T nach. Damit gilt $\text{act}(T, M_\Omega^n)$, also $E, T \in S_{N_\Omega}$. Nun ist noch zu zeigen, daß M'_Ω mit $M_\Omega[E, T > M'_\Omega]$ die oben angegebene Gestalt hat. Dies wird wieder mit einer Fallunterscheidung gemacht: Sei $T_1, T_2 \in \Sigma_{N_\Omega}$, o.B.d.A. $p(T_1, T_2)$.

1. Es gibt $t \in T$ mit $F_{N_\Omega}((T_1, T_2), t) = 1$. Wie schon gezeigt, gilt $M_\Omega^n((T_1, T_2)) = 1$. Durch das Schalten von $t \in T$ gilt $M'_\Omega((T_1, T_2)) = 0$, was der Induktionsannahme entspricht.
2. Es gibt $t \in T$ mit $B_{N_\Omega}((T_1, T_2), t) = 1$. analog.
3. Sonst ändert sich weder die Markierung noch die in der Induktionsbehauptung zur Darstellung von M'_Ω verwandte Bedingung. Nach Induktionsannahme hat also auch hier die Markierung M'_Ω die richtige Gestalt. (Der Fall, daß $p(T_2, T_1)$ gilt, wird analog behandelt.

b) Nach der Definition der Schaltmenge (4.2.5) gilt $\Sigma_N = \Sigma_N^{\text{act}}$. Ferner läßt sich anhand von 6.14 leicht nachweisen, daß $F_{N_\Omega}((T_1, T_2)) = T_1 = B_{N_\Omega}((T_2, T_1))$ sowie $F_{N_\Omega}((T_1, T_2)) = T_2 = B_{N_\Omega}((T_2, T_1))$ für $p(T_1, T_2)$ gilt. Nach Definition von p und von N_Ω sind damit auch die Bedingungen a) und c) von 6.4 erfüllt.

c) Sei (N, M) weiteres normales Netz mit $\Omega \subset S_N$ und $\Sigma_N = \Sigma$. Dann gilt: für $p \in \Pi$:

a) Gilt $M(p)=1$, so folgt $p(B_N(p), F_N(p))$ und p ist somit belegte Stelle von N_Ω mit

$$F_{N_\Omega}(p)=F_N(p) \text{ und } B_{N_\Omega}(p)=B_N(p). (p=(B_N(p), F_N(p)))$$

b) Gilt $M(p)=0$, so gilt $p(F_N(p), B_N(p))$ und p ist somit unbelegte Stelle von N_Ω mit

$$F_{N_\Omega}(p)=F_N(p) \text{ und } B_{N_\Omega}(p)=B_N(p). (p=(F_N(p), B_N(p)))$$

Damit ist $S=\{(F_N(p), B_N(p)) | M(p)=0\} \cup \{(B_N(p), F_N(p)) | M(p)=1\}$.

6.16 Satz: Ω sei Schaltmenge über Σ . Es existiert genau dann ein markiertes Netz (N, M) mit $S_N=\Omega$, wenn $S_{N_\Omega}=\Omega$ gilt. In diesem Falle ist N_Ω das feinste normale Netz N mit $S_N=\Omega$ bezüglich der Ordnung;

$$\begin{aligned} (N_1, M_1) + (N_2, M_2) :<=> S \subseteq \Pi_N \quad \Pi_{N_1} = \Pi_{N_2} \cap S \wedge \Sigma_{N_1} = \Sigma_{N_2} \wedge \\ F_{N_1} = F_{N_2} \upharpoonright_{\Pi_{N_2} \cap S \times \Sigma_{N_2}} \wedge \\ B_{N_1} = B_{N_2} \upharpoonright_{\Pi_{N_2} \cap S \times \Sigma_{N_2}} \wedge M_1 = M_2 \upharpoonright_{\Pi_{N_1}}. \end{aligned}$$

Bew.: Gilt $S_{N_\Omega}=\Omega$, so ist N_Ω offenbar ein Netz mit der Schaltsequenzenmenge Ω . Wegen 6.15.c) ist es auch das feinste derartige normale Netz.

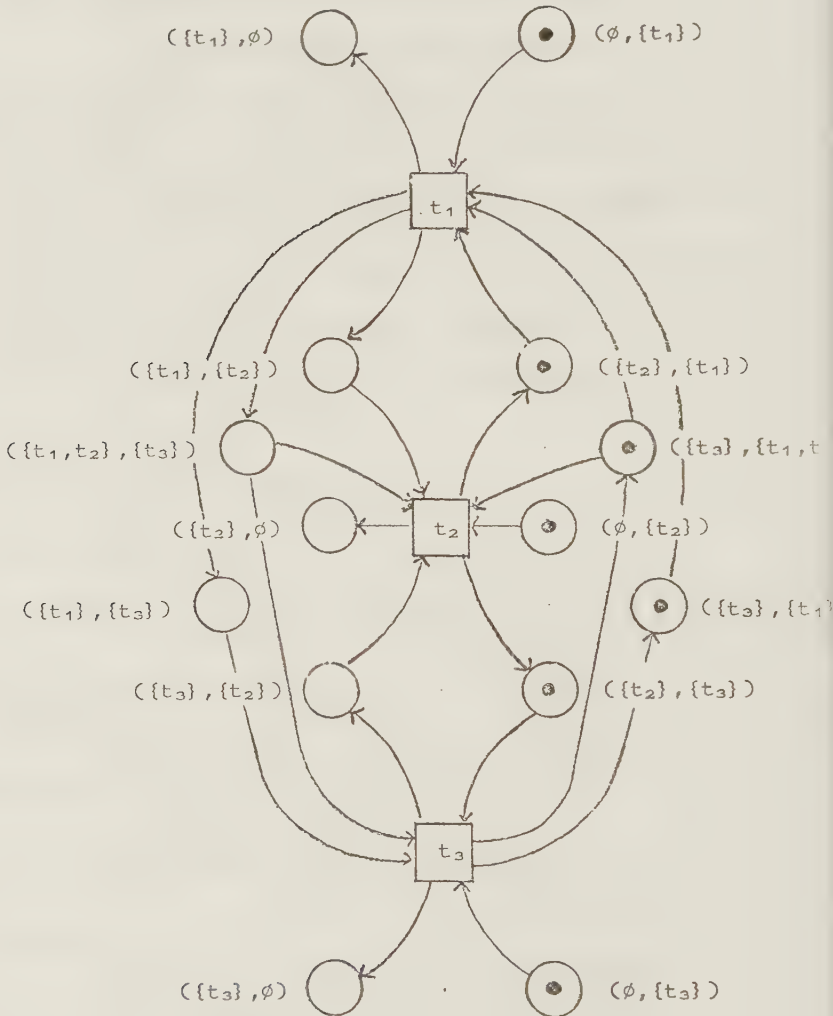
Existiert ein Netz (N, M) mit der Schaltsequenzenmenge Ω , so erfüllt die Normalisierung $(\tilde{N}, \tilde{M})$ offenbar die Prämisse von 6.15.c). Damit ist $(\tilde{N}, \tilde{M})$ bezüglich der in der Aussage des Satzes definierten Ordnung gröber als (N_Ω, M_Ω) .

Wie man leicht nachprüft, folgt daraus

$$\Omega = S_N = S_{\tilde{N}} \supseteq S_{N_\Omega} \supseteq \Omega, \text{ also } S_{N_\Omega} = \Omega.$$

Interpretiert man die in 6.15 definierte Ordnung dahingehend, daß von zwei normalen Netzen $(N_1, M_1) + (N_2, M_2)$ mit gleicher Schaltsequenzenmenge Ω N_2 die zur Menge Ω führenden statischen Abhängigkeiten zwischen den Transitionen "detaillierter" beschreibt als N_1 , so kann N_Ω als "detaillierteste" Beschreibung aller zu Ω führenden statischen Abhängigkeiten aufgefaßt werden.

6.17 Beispiel: Das Netz (N_S, M_S) , wobei S die Menge der Schaltsequenzen des Netzes (N_1, M_1) ((N_2, M_2) und (N_3, M_3)) in Beispiel 6.11 ist, hat das folgende Aussehen:



Die Symmetrie dieses Netzes ist nicht zufällig. Sie entsteht dadurch, daß jedes Paar (T_1, T_2) , das $p(T_1, T_2)$ erfüllt, zwei Stellen in N_S erzeugt. Auf der linken Seite stehen alle Stellen (T_1, T_2) mit $p(T_1, T_2)$; auf der rechten Seite stehen die dazu dualen Stellen (T_2, T_1) . Von zwei dualen Stellen ist immer genau eine belegt und eine un-belegt. Das Netz N_S gibt damit die "lokalen" Abhängigkeiten zwischen zwei Transitionen wieder. In diesem Beispiel bestehen zwischen allen Transitionen lokale Abhängigkeiten, da keine mehrle-mentige Transitionenmenge schalten kann. Die Vielzahl der Stellen, die entweder keine Eingänge oder kei-ne Ausgänge haben, resultiert daraus, daß die Trans-itionen des Netzes höchstens einmal schalten können. (Aus diesem Grunde sind bei der Bezeichnung der Stellen des Netzes N_S auch die Transitionen statt ihrer Ereignisse verwandt worden.)

Durch Elimination der von $(\{t_1, t_2\}, \{t_3\})$ und $(\{t_1\}, \{t_3\})$ erzeugten Stellen in der in 6.15.c) angegebenen Weise erhält man das Netz $(N_{S'}, M_{S'})$ wobei S' die Schaltsequenzenmenge des Netzes (N_4, M_4) in Beispiel 6.11 ist.

6.18 Satz: Ω sei Schaltmenge über Σ mit $S_{(N_\Omega, M_\Omega)} = \Omega$.

Dann hat jedes Netz, das in der in 6.15.c) ange-gebenen Weise durch Elimination einer Stellenmenge $S \cap N_\Omega$ aus N_Ω entsteht, wobei $(T_1, T_2) \in S \Rightarrow (T_2, T_1) \notin S$ gilt, die Schaltsequenzenmenge Ω .

Bew.: Da in jeder von M_Ω aus erreichbaren Markierung von N_Ω genau eine von zwei dualen Stellen belegt ist, ändert die Elimination einer von zwei dualen Stellen offenbar nichts an der Aktiviertheit von Transitionen vor und nach einem Schaltvorgang.

6.19 Bem.: Die Rückrichtung von 6.18 gilt nicht. Zum Beispiel

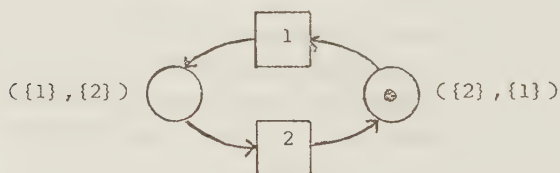
können in dem in 6.17 betrachteten Netz alle von $(\{t_2\}, \emptyset)$ und $(\{t_1, t_2\}, \{t_3\})$ erzeugten Stellen eliminiert werden, ohne die Schaltsequenzenmenge zu verändern. Dies ist z.B. in den in 6.11 betrachteten Netzen (N_1, M_1) , (N_2, M_2) und (N_3, M_3) geschehen.

Nach 4.2.30 ist jede Schaltsequenzenmenge eines strengen Netzes total analysierbar. Jedoch ist nicht jede total analysierbare Schaltmenge Schaltsequenzenmenge eines strengen Netzes. Ein Gegenbeispiel ist:

6.20 Beispiel: Die Schaltmenge

$$\Omega := \{E \mid \tau_E < \tau_{\{1\}, \{2\}, \{1\}, \{2\}}\}$$

ist offenbar total analysierbar, denn sie besitzt nur einen Ablaufbegriff. Das Netz (N_Ω, M_Ω) hat die folgende Gestalt:

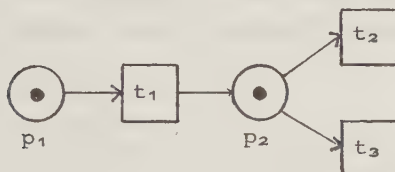


Offenbar ist $(\{1\}, \{2\})^\omega$ Schaltsequenz von (N_Ω, M_Ω) aber nicht in Ω enthalten. Deshalb existiert nach 6.16 kein strenges Netz mit der Schaltsequenzenmenge Ω .

7. Ablaufbegriffe auf der Schaltsequenzenmenge eines allgemeinen Petri-Netzes

7.1 Ein einfaches Beispiel zeigt, daß die Schaltsequenzenmenge eines allgemeinen Petri-Netzes im allgemeinen keinen Ablaufbegriff besitzt, der 5.1. erfüllt, und auch nicht immer total analysierbar ist. Dieser Sachverhalt ist in der unterschiedlichen Definition der Schaltregel begründet. Die Schaltregel für allgemeine Petri-Netze ermöglicht es verschiedenen Transitionen mit gemeinsamen Randstellen, gleichzeitig zu schalten. Dieser Umstand ist die Ursache der Schwierigkeiten bei der Definition einer vernünftigen semantischen Restriktion zur eindeutigen Bestimmung eines mit der Petri-Netz-Semantik verträglichen Ablaufbegriffs. Das kommt darin zum Ausdruck, daß das in dem relevanten Beispiel betrachtete allgemeine Petri-Netz lediglich aus einer primitiven Anordnung besteht, die eine entsprechende Situation darstellt.

7.1.1 Beispiel: Sei das folgende markierte Petri-Netz (N, M) betrachtet:



Das oben dargestellte Petri-Netz hat unter anderem die folgenden Schaltsequenzen:

$E_1 = \{1\}, \{2, 3\}$; $E_2 = \{1, 2\}, \{3\}$; $E_3 = \{1, 3\}, \{2\}$;
 $E_4 = \{1\}, \{2\}, \{3\}$; $E_5 = \{1\}, \{3\}, \{2\}$; $E_6 = \{2\}, \{1\}, \{3\}$.

Sei angenommen, daß ein Ablaufbegriff π existiert, der 5.1 erfüllt. Dann gilt $\sim(\text{Def. 5.2.1}) \subset \pi$.

Da $E_1 \sim E_2$ gilt, ist $\leq_{[E_1]}^\pi$ größer als:

$$(1,1) \bullet \longrightarrow \bullet (3,1) \quad \bullet (2,1).$$

Ebenso ist $\leq_{[E_1]_\pi}$ wegen $E_1 \sim E_3$ gröber als:

$$(1,1) \bullet \longrightarrow \bullet (2,1) \quad \bullet (3,1).$$

Deshalb kann nur $\leq_{[E_1]_\pi} = \Delta \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$ gelten.

Die Sequentialisierung $\{1,3,2\}$ von Δ ist aber keine Schaltsequenz des Netzes.

Auf der Schaltsequenzenmenge des oben dargestellten Petri-Netzes gibt es unter anderem die Ablaufbegriffe π_1 und π_2 mit den folgenden Strategien:

$$T_{\pi_1} = \{1 \rightarrow 2 \leftrightarrow 3; \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \rightarrow 3; \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow 2; \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow 3; \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \rightarrow 2; 1 \quad 3; 1 \quad 2; 1; 2; 3\}$$

$$T_{\pi_2} = \{1 \overset{2}{\leftarrow} 3\} \cup T_{\Delta_S}, \text{ wobei } S' = S_{(N,M)} - L(1 \overset{2}{\leftarrow} 3) \text{ ist.}$$

(In Anlehnung an die Darstellung von Ordnungen durch Hasse-Diagramme sind hier die Relationen $x \text{ EQ}(\tau) x'$ durch $x \leftrightarrow x'$ und $x \text{ SOR}(\tau) x'$ durch $x \rightarrow x'$ dargestellt. Die Aktionen sind dabei wieder durch die sie ausführenden Transitionen ersetzt worden.)

Es gilt $\pi_1 \not\leq \pi_2 \wedge \pi_2 \not\leq \pi_1$. Ferner ist π_1 maximales Element in der durch die Feinheit (Def. 4.3.6) geordneten Menge der Ablaufbegriffe von $S_{(N,M)}$. Damit existiert kein feinstes Ablaufbegriff auf $S_{(N,M)}$.

Die hier entstehenden Schwierigkeiten sind offenbar in der veränderten Definition der Schaltregel begründet. Gleichzeitig schaltende Transitionen können nämlich hier auch gemeinsame Randstellen haben und sind deshalb nicht immer als unabhängig zu betrachten. Es gibt mehrere Auswege aus dieser Situation. Alle diese Auswege resultieren in semantischen Restriktionen zur eindeutigen Definition eines Ablaufbegriffs auf der Schaltsequenzenmenge eines markierten allgemeinen Petri-Netzes, legen also die Freiheiten beim Nachspielen von Systemaktivitäten fest. Verschiedene Restriktionen führen dabei zu verschiedenen Interpretationen des token game. Das zeigt, daß die allge-

meinen Petri-Netze ohne eine dieser Restriktionen nicht ausreichend Information zur Definition einer eindeutigen unterliegenden Nebenläufigkeitsstruktur, also zur Darstellung von Systemverhalten liefern. Hier führt die genaue Definition der Vorgänge bei der Simulation von Systemaktivitäten also nicht nur zur tieferen Interpretation eines Nebenläufigkeitsmodells, sondern erst zur seiner vollständigen Definition.

Nun werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert, durch semantische Restriktionen zu Ablaufbegriffen auf der Schaltsequenzenmenge eines markierten allgemeinen Petri-Netzes zu gelangen.

7.2 FIFO-Interpretation

Eine Möglichkeit, das token game zu konkretisieren, ist, sich die Stellen des Petri-Netzes als lineare Speicher unbegrenzter Kapazität vorzustellen, in denen die Marken nach dem first in - first out Prinzip gespeichert werden. Obwohl man mit dieser Annahme von der an sich dem Modell anhaftenden Ununterscheidbarkeit von Marken auf Stellen abgeht, ist sie für viele Anwendungen der allgemeinen Petri-Netze sinnvoll. Geht man von dieser FIFO-Interpretation der Stellen aus, so kommt man zu der folgenden Deutung der Abhängigkeiten zwischen gleichzeitigen Schaltungen von Transitionen:

7.2.a) t_1 und t_2 haben keine gemeinsamen Randstellen:

Wie bei strengen Netzen soll dies bedeuten, daß t_1 und t_2 unabhängig schalten, daß heißt, daß die durch die Schaltungen von t_1 bzw. t_2 modellierten Vorkommnisse unabhängig voneinander eintreten.

7.2.b) t_1 und t_2 haben gemeinsame Randstellen. Alle solchen Stellen sind Ausgänge von t_1 und Eingänge von t_2 :

Da t_1 und t_2 in einem Schritt schalten und alle Stellen als FIFO-Speicher von Marken verstanden werden,

verbraucht t_2 beim Schalten in jedem Fall nur Marken, die nicht durch das gleichzeitige Schalten von t_1 erzeugt worden sind. t_1 und t_2 schalten somit unabhängig.

7.2.c) t_1 und t_2 haben gemeinsame Randstellen. Unter ihnen gibt es Stellen, die Eingänge (Ausgänge) von t_1 und t_2 sind:

In diesem Fall ist nicht klar, in welcher Anordnung die von t_1 und t_2 verbrauchten (erzeugten) Marken in dem gemeinsamen Eingang (Ausgang) gespeichert sind. In der Modellierung des Systems durch das Netz kommt die Unfähigkeit zum Ausdruck, zwei Vorkommnisse genau auf die logischen Voraussetzungen ihres Eintretens zu untersuchen, wenn sie zu Schaltungen von t_1 und t_2 führen und von der Beobachtungseinheit zeitlich nicht getrennt werden konnten. Könnte die Nachstelleinheit zwischen konsekutivem und gleichzeitigem Schalten von t_1 und t_2 wählen, so könnte sie zwei Fälle vermischen, die t_1 und t_2 in unterschiedliche Beziehung setzen. Denn beim konsekutiven Schalten von t_1 und t_2 liegt der Weg aller Marken fest, was beim simultanen Schalten von t_1 und t_2 nicht der Fall ist. Die Forderung an die Nachstelleinheit, diese beiden unterschiedlichen Situationen nicht durcheinander zu bringen, resultiert in einer symmetrischen Beziehung von t_1 und t_2 in der jeweiligen Strategie.

Aufgrund der obigen Überlegungen kommt man zu der folgenden semantischen Restriktion für einen mit der FIFO-Interpretation des Modells der allgemeinen Petri-Netze verträglichen Ablaufbegriff:

7.2.1 Bedingung (für einen mit der FIFO-Interpretation des Modells der allgemeinen Petri-Netze verträglichen Ablaufbegriff): Die Relation aff_1 zwischen Aktionen sei definiert durch:

$$\text{aff}_1(t_1, t_2) := F(t_1) \cap F(t_2) \neq \emptyset \vee B(t_1) \cap B(t_2) \neq \emptyset$$

Ein Ablaufbegriff π auf der Schaltsequenzenmenge S des Netzes N ist mit N verträglich, wenn gilt:

$$\bigwedge_{K \in S/\pi} \text{EQ}(\tau_K) = \text{Trans}(\text{aff}_1 \cap \text{CSOR}(\tau_K) \cap \text{CSOR}(\tau_K)^{-1}).$$

Gemäß einem Ablaufbegriff, der 7.2.1 erfüllt, nehmen zwei Aktionen in einer Schaltsequenz E genau dann an einer gemeinsamen Komplexaktion teil, wenn sie durch eine Reihe benachbarter Transitionen verbindbar sind, die in E gleichzeitig schalten.

In den folgenden Ausführungen wird ähnlich wie in Abschnitt 5.2 vorgegangen, um zu zeigen, daß die Bedingung 7.2.1 eindeutig einen Ablaufbegriff auf der Schaltsequenzenmenge eines allgemeinen Petri-Netzes als mit der FIFO-Interpretation verträglich auszeichnet.

Sei im folgenden (N, M) ein markiertes allgemeines Petri-Netz.

7.2.2 Def.: Die Relation $\leftarrow$ auf S wird definiert durch:

$$E \leftarrow E' := \text{OS}(E) = \text{OS}(E') \wedge E \lambda_{\text{OS}(E)} E' \wedge$$

$$t, t' \in \text{OS}(E) \text{ aff}_1(t, t') \wedge t \text{ EQ}(\tau_E) t' \Rightarrow t \text{ EQ}(\tau_E) t'.$$

Die symmetrische Hülle von $\leftarrow$ wird mit $\leftrightarrow$ bezeichnet. Die transitive Hülle von $\leftrightarrow$ wird mit $\sim$ bezeichnet. Der Abschluß von $\sim$ in der Topologie X auf S (5.2.14) wird mit $\times$ bezeichnet.

7.2.3 Lemma: Sei $K \in S/\times$. Dann gilt:

$$\text{a) } t, t' \text{ unabhängig in } \tau_K \Rightarrow \neg \text{aff}_1(t, t')$$

$$\text{b) } \text{EQ}(\tau_K) = \text{Trans}(\text{aff}_1 \cap \text{CSOR}(\tau_K) \cap \text{CSOR}(\tau_K)^{-1}).$$

Bew.: a) Der Beweis verläuft analog zu 5.2.19. In derselben Weise wie dort gelangt man zu der Aussage $t \not\sim_{E_1} t' \wedge t \not\sim_{E_{i+1}} t'$. Daraus folgt $t \text{ EQ}(\tau_{E_{i+1}}) t'$

(sonst Widerspruch zu $\tilde{E}_i \leftrightarrow \tilde{E}_{i+1}$). Nach Definition von $\leftrightarrow$ gilt somit $\tilde{E}_i \leftrightarrow \tilde{E}_{i+1}$ also nach Def. 7.2.2 $\neg \text{aff}_K(t, t')$.

b) Zunächst wird gezeigt: $\text{EQ}(\tau_K) = \text{Trans}(\text{aff}_K \cap \text{EQ}(\tau_K)) = :$

" $\supset$ ": trivial.

" $\subset$ ": Sei $E \in K$, $E(n) = T \cup \{t, t'\}$. Sei angenommen,

daß gilt $\neg t \chi t'$. Dann gilt für alle $t'' \in T$:

$\neg t'' \chi t' \vee \neg t'' \chi t$. Sei $T' := \{t'' \in T \mid t'' \chi t'\}$. Sei

$E' := E(1), \dots, E(n-1), T - T', T', E(n+1), \dots$

E' ist Schaltsequenz, und es gilt $t_1 \in T - T' \wedge t_2 \in T' \wedge \text{aff}_K(t_1, t_2) \Rightarrow t_1 \text{ EQ}(\tau_K) t_2$ (wegen a) $\wedge t_2 \chi t'$, also $t_1 \chi t'$, im Widerspruch zur Definition von T' . Also gilt $t_1 \in T - T' \wedge t_2 \in T' \Rightarrow \neg \text{aff}_K(t_1, t_2)$. Daraus folgt $E' \neq E$, also $E' \neq E$, aber $t \in E, t' \in E'$, im Widerspruch zu $t \text{ EQ}(\tau_K) t'$.

Nun ist noch zu zeigen, daß $\text{aff}_K \cap \text{CSOR}(\tau_K) \cap \text{CSOR}(\tau_K)^{-1} = \text{aff}_K \cap \text{EQ}(\tau_K)$. Das folgt aber sofort aus a).

7.2.4 Bem.: Das Lemma 5.2.20 a) läßt sich für Petri-Netze übernehmen. In dem entsprechenden Beweis werden lediglich die Gleichungen im Beweis von 5.2.20 a) zu Ungleichungen.

7.2.5 Satz: Sei $K \in S/\mathbb{K}$. Dann gilt $K = L(\tau_K)$.

Bew.: " $\subset$ ": trivial nach Definition von τ_K .

" $\supset$ ": Der Beweis verläuft analog zum Beweis von 5.2.21. Zunächst wird das Beweisschema 5.2.21 auf Petri-Netze übertragen.

7.2.6 Beweisschema: $E \in S, E' \in P(\Sigma)^N$. Gelte $s(E) = s(E')$. Die Voraussetzung V (siehe Beweis) sei erfüllt. Dann gilt $E \neq E'$.

Bew.: Der Beweis kann vollständig von 5.2.22 übernommen werden, da er nur die Definition der Topologie X benutzt. Lediglich für den (induktiven) Beweis,

daß E_{n+1} Schaltsequenz ist, sind Eigenschaften des Netzes verwandt worden (insbesondere 5.2.20). Da 5.2.20 a) auf Petri-Netze übertragbar ist (siehe 7.2.4) läßt sich der entsprechende Beweis für Petri-Netze leicht führen:

Sei angenommen, daß E_{n+1} keine Schaltsequenz ist (unter der Voraussetzung, daß E_k für $k \leq n$ Schaltsequenzen sind. Dann existiert $j > n+1$, sodaß gilt $E_{n+1} j | \in S$ und $\neg \text{act}(E_{n+1}(j+1), M(E_{n+1} j |))$. Offenbar existiert (nach Definition der Schaltregel für Petri-Netze) dann ein $p \in \Pi$, sodaß für $T := \{t \in E_{n+1}(j+1) | p \in F(t)\}$ gilt: $\neg \text{act}(T, M(E_{n+1} j |))$.

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $j+1 < i_m$. Für $k > m$ unterscheiden sich $E_{n+1}^k j+1 |$ und $E_{n+1} j+1 |$ nur in der Stelle $n+1$. Da E_{n+1}^k Schaltsequenz ist (nach Induktionsvoraussetzung), ist T endlich, und es gilt:

$$M(E_{n+1} j |)(p) < \sum_{t \in T} F(p, t) \leq M(E_{n+1}^k j |)(p).$$

Sei $T' := \{t' \in E_{n+1}(n+1) | p \in F(t')\}$. Aus $E_{n+1} j | \in S$ folgt, daß T' endlich ist. Also gibt es ein $l > m$ mit $T' \subseteq E_{n+1}^l(n+1)$. Daher gilt $M(E_{n+1}^l j |)(p) \leq M(E_{n+1} j |)(p)$ im Widerspruch zu $\neg \text{act}(T, M(E_{n+1} j |))$.

Fortsetzung des Beweises von 7.2.5: Wie im Beweis von 5.2.21 wird das Beweisschema angewandt. Es ist deshalb nur zu zeigen, daß die Voraussetzung V im Beweisschema erfüllt ist. Dazu wird induktiv gezeigt, daß $E_{n+1}^k \sim E_{n+1}^{k+1}$ gilt.

Die Struktur des Beweises dieser Aussage kann ebenfalls von 5.2.21 übernommen werden. Wie dort wird

gezeigt (wegen 7.2.3.a), daß die im $k+1$ -ten Schritt von $E_{n+1}^k(i_k+1)$ nach $E_{n+1}^{k+1}(n+1)$ zu überführenden Aktionen, eben die Elemente aus $E'(n+1) \cap E_{n+1}^k(i_k+1)$, bezüglich $\tau_{[E]_X}$ unabhängig von allen Elementen aus $E_{n+1}^k(j)$ für $n+1 \leq j \leq i_k$ sind.

Aus dieser Tatsache soll nun geschlossen werden können, daß die schrittweise Transformation von $E_{n+1}^k(i_k+1) \cap E'(n+1)$ über die $E_{n+1}^k(j)$ zu $E_{n+1}^k(n+1)$ in $\sim$ durchführbar ist. Dies wird hier wie in 5.2.21 nur für den ersten Schritt gezeigt, wobei die Terminologie des Beweises von 5.2.21 übernommen wird. Danach ist

$$T_1 := E_n(i_k) \cap E'(n+1)$$

$$T_2 := E_n(i_k) - T_1$$

$$T := E_{n+1}^k(i_k)$$

Je ein Element $t_1 \in T_1$ und $t \in T$ sind nach der eben gemachten Aussage bezüglich $\tau_{[E]_X}$ unabhängig. In 5.2.21 konnte daraus geschlossen werden, daß t_1 und t keine gemeinsamen Randstellen haben. Das ist in diesem Fall nicht möglich, da nicht die strenge Schaltregel benutzt wird. Vielmehr kann $B(t) \cap F(t_1)$ gelten. Trotzdem kann gezeigt werden, daß die Sequenz $E_1 := E_{n+1}^k(i_k-1) \mid T \cup T_1, T_2 - T_1, i_k+1 \mid E_{n+1}^k$

Schaltsequenz ist:

Sei $K := [E]_X$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $E_{n+1}^k \bowtie E \bowtie E'$. Ein Vergleich von $M(E' \mid n)$ und $M(E_{n+1}^k(i_k-1) \mid)$ auf der Menge $F(t_1)$ zeigt: Offenbar gilt $M(E' \mid n)[F := E_{n+1}^k(n+1), \dots, E_{n+1}^k(i_k-1)] > M(E_{n+1}^k(i_k-1) \mid)$. Die in dieser Aussage enthaltene Schaltfolge F besteht nach den obigen Überlegungen nur aus Ak-

tionen, die von t_1 bezüglich τ_K unabhängig sind. Nach 7.2.3.a) sind solche Transitionen nicht mit t_1 bezüglich der Relation aff_1 benachbart. Daraus folgt: $M(E'_n |)(F(t_1)) \leq M(E_{n+1}^k |)(F(t_1))$. Da E' Schaltfolge ist, ist t_1 bei $M(E'_n |)$, also auch bei $M(E_{n+1}^k |)$ aktiviert. Da E_{n+1}^k und E' Sequentialisierungen von τ_K sind und somit die Integrität der Äquivalenzklassen von $\text{EQ}(\tau_K)$ respektieren, läßt sich die Transformation in durch schrittweises Transportieren von $[t_1]_{\text{EQ}(\tau_K)}$ über die $E_{n+1}^k(j)$ bewerkstelligen.

7.2.7 Satz: Sei $K \in S/\mathbb{K}$. Sei τ Quasiordnung auf $\text{OS}(K)$ mit $\tau \neq \tau_K$.

Erfülle τ die Bedingung 7.2.3.b). Dann existiert eine Sequentialisierung von τ , die keine Schaltsequenz von N ist.

Bew.: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von 5.2.23.

Die Erfülltheit der Bedingung 7.2.3.b) für τ und τ_K ermöglicht eine Übertragung der im Beweis von 5.2.23 gemachten Betrachtungen von $\leq$ und $\leq_K$ auf τ und τ_K .

(Def. 2.3.10):

Zunächst gilt: $\text{EQ}(\tau) = \text{EQ}(\tau_K)$. Bew: " $\subset$ ": trivial.

" $\supset$ ": $\text{EQ}(\tau_K) = \text{Trans}(\text{aff}_1 \cap \text{CSOR}(\tau_K) \cap \text{CSOR}(\tau_K)^{-1}) \subset \text{Trans}(\text{aff}_1 \cap \text{CSOR}(\tau) \cap \text{CSOR}(\tau)^{-1}) = \text{EQ}(\tau)$.

Aus $\text{EQ}(\tau) = \text{EQ}(\tau_K)$ und $\text{SOR}(\tau) \subset \text{SOR}(\tau_K)$ folgt $\leq_\tau \subset \leq_{\tau_K}$.

Damit kann der Beweis von 5.2.23 unter Verwendung von 2.3.17 statt 2.2.17 und von 7.2.5 statt 5.2.21 übernommen werden.

7.2.8 Lemma: Sei $K \in S/\mathbb{K}$, $E \in K$. Dann gilt $\tau_{[E]_X} = \tau_{[E]_\sim}$.

Bew.: Da $[E]_X \supset [E]_\sim$ gilt $\tau_{[E]_X} \supset \tau_{[E]_\sim}$.

Sei $x \tau_{[E]_X} y$ für $x, y \in \text{OS}(K)$. Fallunterscheidung:

1.) $y \tau_{[E]_x} x$: In diesem Fall gilt $y \text{SOR}(\tau_{[E]_x}) x$ also $y \text{SOR}(\tau_{[E]_{\sim}}) x$. Deshalb gilt $x \tau_{[E]_{\sim}} y$.

2.) $x \tau_{[E]_x} y \wedge y \tau_{[E]_x} x$: . Offenbar gilt für $E, E' \in K$: $E \leftrightarrow E' \iff j_{\tau_K}(E) \wedge j_{\tau_K}(E')$.

Nach 2.3.16 (und 7.2.5) existieren $E_1, E_2 \in K$ mit

$$E_1 = \dots, [x]_{\text{EQ}(\tau_{[E]_x})}, [y]_{\text{EQ}(\tau_{[E]_x})}, \dots$$

$$E_2 = \dots, [y]_{\text{EQ}(\tau_{[E]_x})}, [x]_{\text{EQ}(\tau_{[E]_x})}, \dots$$

sowie $j_{\tau_K}(E_1) \pi j_{\tau_K}(E) \pi j_{\tau_K}(E_2)$. Damit gilt $E_1 \sim E \sim E_2$, und somit sind x und y unabhängig in $\tau_{[E]_x}$.

7.2.9 Satz: $S/\approx$ ist präfixabgeschlossen (siehe 4.3.1 und 5.2.25).

Bew.: Analog zum Beweis von 5.2.25. Es werden nur die Definition von $\approx$ und das Beweisschema benutzt.

7.2.10 Satz: $S/\approx$ ist durch $<$ induktiv geordnet.

Bew.: Analog zum Beweis von 5.2.26 unter Verwendung von 7.2.3.a).

Der induktive Beweis der in dem Beweis von 5.2.26 unter 1) stehenden Aussage gestaltet sich hier folgendermaßen:

Sei E_n Schaltsequenz. Zu zeigen ist, daß gilt: $\text{act}(E(n+1), M(E_n |))$. Dazu ist für alle $p \in \Pi$ zu zeigen, daß $M(E_n |)(p) \geq_{t \in E(n+1)}^F F(p, t)$ gilt.

Da $T := \{(t, n) \in E(n+1) \mid F(p, t) \neq 0\}$ endlich ist (3.2.1), existiert ein $j \in I$ mit $T \subseteq O\Sigma(K_j)$. Der Beweis der Aktiviertheit von T bei $M(E_n |)$ verläuft nun analog zum Beweis der Aktiviertheit von t bei $M(E_n |)$ im Beweis von 1) zu 5.2.26 (Verwendung von 7.2.3.a).

7.2.11 Satz: Die Äquivalenzrelation $\approx$ auf S erfüllt die Bedingung 7.2.1.

Bew.: Analog zum Beweis von 5.2.27 mit 7.2.5, 7.2.11, 7.2.9 und 7.2.3.

7.2.12 Satz: Sei π Äquivalenzrelation auf S , für die gilt:
 $\bigwedge_{K \in S/\pi} K = L(\tau_K)$ und die 7.2.3.b) erfüllt. Dann gilt $\pi = \approx$.

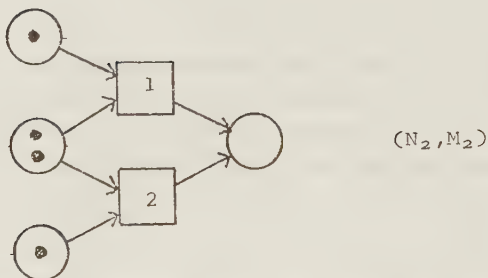
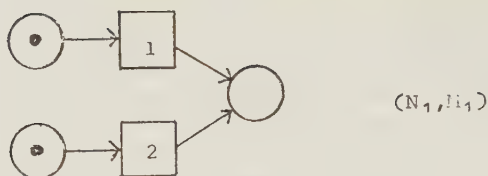
Bew.: Analog zum Beweis von 5.2.28

7.2.13 Def.: (N, M) sei markiertes allgemeines Petri-Netz.
Sei Σ^{act} analog zu 5.2.30 definiert. Das Tripel $(\Sigma^{\text{act}}, S, \approx)$ heißt die gemäß der FIFO-Interpretation der Stellen (N, M) UNTERLIEGENDE oder von (N, M) INDUZIERTER Nebenläufigkeitsstruktur.

Die einem allgemeinen Petri-Netz nach der FIFO-Interpretation der Stellen unterliegende Nebenläufigkeitsstruktur entbehrt einiger Eigenschaften, die die einem strengen Netz unterliegende Nebenläufigkeitsstruktur besitzt:

1. Sie enthält nicht immer den feinsten Ablaufbegriff auf der Schaltsequenzenmenge des Petri-Netzes. In 7.1.1 wurde gezeigt, daß ein solcher Ablaufbegriff nicht einmal immer existiert.
2. Die einem Petri-Netz unterliegende Nebenläufigkeitsstruktur ist nicht ausschließlich anhand der Schaltsequenzenmenge des Netzes definiert. Vielmehr gehen in die Definition auch Strukturen des Netzes selbst ein (siehe Definition 7.2.2). Daher kann es verschiedene Petri-Netze mit gleicher Schaltsequenzenmenge geben, die verschiedene Nebenläufigkeitsstrukturen induzieren. Ein Beispiel gibt 7.2.14.

7.2.14 Beispiel: Die im folgenden dargestellten markierten Petri-Netze (N_1, M_1) und (N_2, M_2) haben dieselbe Schaltsequenzenmenge Ω . (N_1, M_1) induziert den feinsten Ablaufbegriff auf Ω ; (N_2, M_2) induziert den gröbsten Ablaufbegriff auf Ω . Die von (N_1, M_1) und (N_2, M_2) induzierten Nebenläufigkeitsstrukturen sind verschieden.



7.2.15 Bem.: Das Modell der allgemeinen Petri-Netze mit der FIFO-Interpretation der Stellen umfaßt das Modell der strengen Netze in dem Sinne, daß jede von einem strengen Netz induzierte Nebenläufigkeitsstruktur auch von einem Petri-Netz (nämlich dem strengen Netz selbst als Petri-Netz aufgefaßt) erzeugt wird.

7.3 Ununterscheidbarkeit der Marken

Hält man an der Ununterscheidbarkeit der Marken, also an einer zufälligen Verteilung der Marken auf einer Stelle fest, so sind die einzelnen Fälle beim gleichzeitigen Schalten verschiedener Transitionen anders zu deuten. als in 7.2. Betrachtet seien wiederum zwei gleichzeitig schaltende Transitionen:

7.3.a) t_1 und t_2 haben keine gemeinsamen Randstellen:
Dieser Fall wird wie in 7.2.a) interpretiert.

7.3.b) t_1 und t_2 haben gemeinsame Randstellen. Alle solchen Randstellen sind Eingänge (Ausgänge) von t_1 und t_2 :

Da Marken ununterscheidbar sind, weiß man nicht, in welchen Aktionen die Marken erzeugt (verbraucht) werden, die durch das Schalten von t_1 und t_2 verbraucht (erzeugt) werden. Unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Transitionen t_1 und t_2 schalten, haben diese Schaltungen dieselben Voraussetzungen (Folgen), nämlich alle diejenigen Schaltungen, die die Marken erzeugen (verbrauchen), die auf dem gemeinsamen Eingang direkt vor (nach) dem Schalten von t_1 und t_2 liegen. Die Schaltungen von t_1 und t_2 können somit unabhängig voneinander vor sich gehen: Keine Schaltung beeinflusst die Voraussetzungen oder Folgen der anderen.

7.3.c) t_1 und t_2 haben gemeinsame Randstellen. Unter ihnen gibt es Stellen, die Eingänge von t_2 und Ausgänge von t_1 sind:

Eine Unabhängigkeit zwischen den Vorkommnissen kann anhand des Netzes in diesem Fall nicht festgestellt werden. Der der Nachstelleinheit auferlegte Zwang, t_1 und t_2 gleichzeitig zu schalten, drückt hier die Unvereinbarkeit einer Vertauschbarkeit der Schaltungen von t_1 und t_2 mit der Netzsemantik aus. Schaltet nämlich t_1 vor t_2 , so besteht wegen der Ununterscheidbarkeit der Marken die Möglichkeit, daß t_2 eine Marke verbraucht, die t_1 erzeugt. Dies ist nicht der Fall, wenn t_2 vor t_1 schaltet. Die Schaltungen von t_1 und t_2 beeinflussen sich also sehr wohl und können deshalb nicht als Modellierungen unabhängiger Vorkommnisse gelten.

Die Voraussetzung der Ununterscheidbarkeit der Marken führt damit zu einer von 7.2.1 verschiedenen semantischen Restriktion:

7.3.1 Bedingung (für einen mit der Semantik des Modells der allgemeinen Petri-Netze unter der Annahme der Ununterscheidbarkeit der Marken verträglichen Ablauf-

begriff): Die Relation aff_2 zwischen Schaltungen von Transitionen sei definiert durch:

$$\text{aff}_2(t_1, t_2) : \Leftrightarrow F(t_1) \cap B(t_2) \neq \emptyset \vee F(t_2) \cap B(t_1) \neq \emptyset.$$

Ein Ablaufbegriff π auf der Schaltsequenzenmenge S eines Petri-Netzes N ist mit N verträglich, wenn gilt:

$$\bigwedge_{K \in S/\pi} \text{EQ}(\tau_K) = \text{Trans}(\text{aff}_2 \cap \text{CSOR}(\tau_K) \cap \text{CSOR}(\tau_K)^{-1}).$$

Die Bedingung 7.3.1 entsteht durch das Ersetzen der Relation aff_1 in 7.2.1 durch die Relation aff_2 und legt, wie sich analog zu den Ausführungen in den Abschnitten 5 und 7 zeigen läßt, wiederum eindeutig eine Nebenläufigkeitsstruktur auf der Schaltsequenzenmenge des Petri-Netzes fest, die als die dem Petri-Netz gemäß der Annahme über Ununterscheidbarkeit von Marken unterliegende Nebenläufigkeitsstruktur bezeichnet wird.

7.4 Beispiel: Zum Abschluß dieses Abschnitts werden die dem in 7.1.1 gegebenen Netz nach 7.2 und 7.3 unterliegenden Nebenläufigkeitsstrukturen angegeben. Da die ersten beiden Komponenten der Nebenläufigkeitsstrukturen in beiden Fällen offensichtlich sind, wird nur auf die entsprechenden Ablaufbegriffe eingegangen:

Der Ablaufbegriff, der dem Netz nach 7.2 unterliegt, ist der in 7.1.1 definierte Ablaufbegriff π_1 .

Der Ablaufbegriff, der dem Netz nach 7.3 unterliegt, ist der in 7.1.1 definierte Ablaufbegriff π_2 .

8. Determiniertheit von Nebenläufigkeitsstrukturen

8.1 Im allgemeinen sind die Definitionen, die wichtige Systemeigenschaften innerhalb eines Nebenläufigkeitsmodells darstellen, von Modell zu Modell verschieden. So dienen z.B. Parallel Program Schemata unter anderem zur Optimierung von Systemen hinsichtlich maximaler Parallelität. Petri-Netze werden unter anderem zu Lebendigkeits- und Sicherheitsuntersuchungen bei Systemen eingesetzt. Die unterschiedlichen Motivationen, aus denen heraus diese beiden Nebenläufigkeitsmodelle entstanden sind, führten zu unterschiedlichen Fähigkeiten der Modelle hinsichtlich der Unterstützung von Untersuchungen bestimmter Problematiken. In diesen Unterschieden manifestiert sich die Spezifität eines Modells, die über die Eigenschaft, ein Nebenläufigkeitsmodell zu sein, hinausgeht.

So ist es zu erklären, daß Systemeigenschaften, die im Modell der Petri-Netze ein Gegenstand intensiver Untersuchungen sind, wie z.B. die Sicherheit von Petri-Netzen, sich in das Modell der Parallel Program Schemata überhaupt nicht integrieren lassen. Ähnlich verhält es sich mit Untersuchungen von Petri-Netzen hinsichtlich maximaler Parallelität, einem bei Parallel Program Schemata äußerst wichtigen Untersuchungsgegenstand. Es erscheint auch sinnlos, derartige Begriffstransformationen zwischen den Modellen durchzuführen, da es sich hierbei um modellspezifische Begriffe handelt.

Neben derartigen modellspezifischen Systemeigenschaften existieren jedoch auch Systemeigenschaften, die Gegenstand von Untersuchungen innerhalb der meisten Nebenläufigkeitsmodelle sind. Solche Systemeigenschaften basieren nicht auf der modellspezifischen Systemstruktur sondern lediglich auf der dem Modell unterliegenden eigentlichen Nebenläufigkeitsstruktur. Eine derartige Systemeigenschaft soll in diesem Abschnitt auf der Grundlage des in 3. definierten Modells für eigentliche Nebenläufigkeit axiomatisiert werden. Es handelt sich um die Determiniertheit von Systemen.

So unterschiedlich die Determiniertheitsdefinitionen in den verschiedenen Modellen für Nebenläufigkeit auch sein mögen, entsprechen sie doch einem gemeinsamen Grundkonzept: Die Determiniertheit eines Systems bedeutet immer, daß das System ein "Ergebnis" eindeutig berechnet. Das heißt: Ein System wird dann determiniert genannt, wenn jede "vollständige" in der Zeit ablaufende Systemaktivität dasselbe "Ergebnis" liefert. Die einzelnen Determiniertheitsdefinitionen unterscheiden sich dabei lediglich in dem Inhalt der Begriffe "vollständig" und "Ergebnis". Sei zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes das folgende Beispiel betrachtet:

Es sei ein nebenläufiger Algorithmus gegeben, der terminiert und der im Laufe seiner endlichen Berechnung einen bestimmten Wert errechnen und in einer Speicherzelle, der Resultatvariablen, ablegen soll. Eine vollständige zeitlich ablaufende Systemaktivität sei in diesem Zusammenhang eine Berechnung durch den Algorithmus, die bis zur Termination des Algorithmus durchgeführt (und nicht vorher abgebrochen) wird. Das Ergebnis einer solchen Berechnung sei der Inhalt der Resultatvariablen nach Beendigung der Berechnung. Setzt man diese Bedeutungen in das obige Definitionsschema für Determiniertheit ein, so ist der Algorithmus determiniert, wenn jede bis zur Termination des Algorithmus durchgeführte Berechnung mit demselben Inhalt der Resultatvariablen endet. Dies ist offenbar eine naheliegende Definition von Determiniertheit.

Eine andere Definition ergibt sich, wenn man den Ergebnisbegriff wie folgt ändert: Das Ergebnis einer Berechnung durch den Algorithmus ist durch eine Wertefolge für jede Speicherzelle gegeben. Diese Folge enthält in der Reihenfolge ihres zeitlichen Auftretens alle Werte, die die Speicherzelle während der Berechnung aufgenommen hat. Die mit diesem Ergebnisbegriff definierte Determiniertheit des Algorithmus ist offenbar stärker als die nach der ersten Definition gegebene Determiniertheit.

Man kann auch noch ganz andere Ergebnisbegriffe definieren, wie z.B. die zeitliche Dauer einer Berechnung (sofern sie für jede Berechnung konstant ist), die Anzahl bestimmter Operationen in einer Berechnung usw. Demgegenüber ist es aber nicht möglich, den Begriff "vollständig" anders zu deuten als in der oben angegebenen Weise. Würde man z.B. jede Berechnung als vollständig ansehen (auch die Berechnungen, die vor der Termination des Algorithmus abbrechen), so gäbe es keinen sinnvollen nebenläufigen Algorithmus, der bezüglich einer der beiden oben definierten Ergebnisbegriffe determiniert ist. Bei einem derartigen Algorithmus müßte nämlich jede Teilberechnung einer (im ersten Sinne) vollständigen Ausrechnung des Resultats dasselbe Ergebnis liefern wie die vollständige Ausrechnung selbst. Der Algorithmus dürfte also nichts effektiv berechnen.

Während der Ergebnisbegriff also in verschiedenster Weise definiert werden kann, bedeutet die Vollständigkeit einer Systemaktivität immer die Eigenschaft, daß das System alle während des zeitlichen Ablaufs der Systemaktivität auftretenden Aufgaben während der Ausführung der Systemaktivität vollständig bewältigt. Das von einer vollständigen Systemaktivität errechnete Ergebnis ist sozusagen ein "Endergebnis" und kein "Zwischenergebnis".

Aus diesen Überlegungen folgt, daß bei der axiomatischen Festlegung des Ergebnisbegriffs sehr viele Freiheiten bleiben werden, während die Definition für die "Vollständigkeit" eine eindeutige Festlegung darüber treffen muß, wie dieser Begriff zu deuten ist.

Aus der Semantik des Ablaufbegriffs (siehe Abschnitt 4) folgt, daß "Ergebnis" und "Vollständigkeit" Begriffe sind, die nicht von der Schaltsequenz, sondern lediglich vom Ablauf (genauer: von der Ablaufstrategie) abhängen. Denn Schaltsequenzen sind lediglich Realisierungen einer Ablaufstrategie, die die kausalen Zusammenhänge im System darstellt. Zwei Schaltsequenzen, die eine gemein-

same Strategie verfolgen, unterscheiden sich sozusagen nur in der Art der technischen Ausführung des Kausalitätenschemas, das die Strategie angibt.

Aus diesen motivierenden Überlegungen ergeben sich die folgenden Definitionen und Axiome:

8.2 Sei im folgenden $N := (\Sigma, \Omega, \pi)$ eine Nebenläufigkeitsstruktur.

8.2.1 Def.: a) Ein VOLLSTÄNDIGER Ablauf von N ist ein maximales Element der durch die Präfixordnung $<$ (siehe 4.3.1.d) geordneten Menge Ω/π .
b) Eine VOLLSTÄNDIGE Schaltsequenz von N ist ein Element eines vollständigen Ablaufs von N .
c) Die Menge der vollständigen Schaltsequenzen von N wird mit Ω^V bezeichnet. Die Menge der vollständigen Abläufe von N wird mit Ω^V/π bezeichnet.

8.2.2 Bem.: a) Nach 4.3.1.d) und dem Lemma von Zorn ist jeder Ablauf von N (in $<$) zu einem vollständigen Ablauf von N fortsetzbar.

b) Im allgemeinen ist nicht jede unendliche Schaltsequenz einer Nebenläufigkeitsstruktur vollständig.

8.2.3 Axiom: Ein ERGEBNISBEGRIFF auf N ist eine Abbildung $f: \Omega^V/\pi \rightarrow E$ in eine Menge E . E heißt ERGEBNISMENGE.

8.2.4 Axiom: Eine DETERMINIERTHEITSSTRUKTUR auf N ist eine Faserung der Menge Ω^V/π .

8.2.5 Def.: Die DETERMINIERTHEITSSTRUKTUR EINES ERGEBNISBEGRIFFS $f: \Omega^V/\pi \rightarrow E$ ist die von f induzierte Äquivalenzrelation π_f .

8.2.6 Bem.: Die Determiniertheitsstruktur eines Ergebnissbegriffs identifiziert genau alle vollständigen Abläufe, die das gleiche Ergebnis liefern.

8.2.7 Def.: a) Die Nebenläufigkeitsstruktur (Σ, Ω, π) heißt DETERMINIERT bezüglich des Ergebnisbegriffs $f: \Omega^V/\pi \rightarrow E$, wenn π_f die totale Äquivalenzrelation ist.

b) Die Kardinalzahl $\kappa(N, f) := |(\Omega^V/\pi)/\pi_f|$ heißt NICHTDETERMINIERTHEITSGRAD von N bezüglich f .

8.2.8 Bem.: a) Die Nebenläufigkeitsstruktur N ist genau dann bezüglich f determiniert, wenn $\kappa(N, f) = 1$ gilt.

b) Offenbar gilt $\kappa(N, f) \leq |\Omega^V/\pi|$.

8.2.9 Def.: π_1, π_2 seien Determiniertheitsstrukturen auf N . Dann heißt π_2 FEINER als π_1 , wenn gilt $\pi_1 \subset \pi_2$.

8.2.10 Bem.: a) Die feinste Determiniertheitsstruktur auf N , die totale Äquivalenzrelation, wird durch einen beliebigen Ergebnisbegriff induziert, bezüglich dessen N determiniert ist. Ein Beispiel für einen solchen Ergebnisbegriff ist der TRIVIALE Ergebnisbegriff $c: \Omega^V/\pi \rightarrow \{\Omega^V/\pi\}$.

b) Die größte Determiniertheitsstruktur auf N wird durch jeden injektiven Ergebnisbegriff induziert. Ein Beispiel für einen solchen Ergebnisbegriff liefert die Abbildung $\text{id}_{\Omega^V/\pi}$.

c) N ist genau dann determiniert bezüglich $\text{id}_{\Omega^V/\pi}$ bzw. bezüglich jedes Ergebnisbegriffs, wenn Ω^V/π einelementig ist.

8.2.11 Def.: Wenn Ω^V/π einelementig ist, heißt N TOTAL DETERMINIERT.

8.3 Determiniertheit von strengen Netzen

In diesem Abschnitt werden die Zusammenhänge der (auf der Basis der einem strengen Netz unterliegenden Nebenläufigkeitsstruktur) nach 8.2. definierten Determiniertheit eines Netzes mit der Netzsemantik untersucht. Im Mittelpunkt steht dabei ein Begriff, der die Möglichkeit der "Willkür" bei der Auswahl von Transitionen während des Schaltens von Netzen formalisiert: Der Begriff des Konfliktes.

Sei im folgenden (N, M) ein markiertes Netz. Gegebenenfalls bezeichnet N auch die unterliegende Nebenläufigkeitsstruktur.

8.3.1 Def.: Seien $t_1, t_2 \in T, E \in S, n \in \mathbb{N}$. Man sagt:

a) t_1, t_2 stehen im KONFLIKT BEI M , wenn gilt:

$$t_1 \kappa_M t_2 \Leftrightarrow \text{act}(t_1, M) \wedge \text{act}(t_2, M) \wedge \neg \text{act}(\{t_1, t_2\}, M) \\ (\Leftrightarrow \text{act}(t_1, M) \wedge \text{act}(t_2, M) \wedge \text{aff}(t_1, t_2))$$

b) t_1, t_2 stehen NACH n SCHALTUNGEN VON E (NACH E_n) im KONFLIKT, wenn gilt:

$$t_1 \kappa_E^n t_2 \Leftrightarrow t_1 \kappa_{M(E_n)} t_2.$$

Die Netzsemantik sowie die Semantik des Vollständigkeitsbegriffs lassen erwarten, das nur solche Schaltsequenzen E vollständig sind, bei denen sämtliche durch das Schalten von Präfixen E_n für $n \in \mathbb{N}$ entstehenden Konflikte im Verlaufe der Schaltsequenzen wieder annulliert, also "gelöst" werden. Die Formalisierung dieser Bedingung dient als Definition eines Maximalitätsbegriffs für Schaltsequenzen:

8.3.2 Def.: Eine Schaltsequenz $E \in S$ heißt maximal, wenn gilt:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} t_1, t_2 \in T \bigwedge_{\Sigma} t_1 \kappa_E^n t_2 \Rightarrow \bigvee_{k > n} \neg t_1 \kappa_E^k t_2.$$

8.3.3 Bem.: Weil $\text{act}(t, M) \Leftrightarrow t \kappa_M t$ gilt, folgt, daß eine

endliche Schaltsequenz E genau dann maximal ist, wenn gilt: $\bigwedge_{t \in \Sigma} \neg \text{act}(t, M)$.

b) Es gibt Netze mit unendlichen nicht maximalen Schaltsequenzen. Ein Beispiel ist durch das in 5.2.2 definierte Netz und die Schaltsequenz $(\{1\}, \{2\})^\omega$ gegeben.

8.3.4 Lemma: Eine Schaltsequenz E ist genau dann maximal, wenn gilt: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{t \in \Sigma} \text{act}(t, M(E_n |)) \Rightarrow \bigvee_{m > n} \neg \text{act}(t, M(E_m |))$.

Bew.: " $\Rightarrow$ ": trivial nach Bem. 8.3.3.a).

" $\Leftarrow$ ": Seien $t_1, t_2 \in \Sigma$ und gelte $t_1 \kappa_E^n t_2$. Dann gilt $\text{act}(t_2, M(E_n |))$. Wähle $m > n$ mit $\neg \text{act}(t_2, M(E_m |))$. Es folgt $\neg t_1 \kappa_E^m t_2$.

Die folgenden Sätze zeigen, daß die Maximalität ein notwendiges aber im allgemeinen kein hinreichendes Kriterium für die Vollständigkeit einer Schaltsequenz ist. Ferner werden Netzeigenschaften als Kriterien angegeben, unter denen Maximalität und Vollständigkeit von Schaltsequenzen übereinstimmen. Es handelt sich hierbei meistens um eine Art von Endlichkeitsaussagen. Des weiteren wird die Vollständigkeit eines Ablaufs eines strengen Netzes mithilfe des Maximalitätsbegriffs für Schaltsequenzen formuliert.

8.3.5 Lemma: Für alle $M' \in [M]$ gelte $\text{act}(T, M') \Rightarrow T$ endlich für $T \in \Sigma$. Dann gilt: Sind E_1, E_2 Schaltsequenzen, ist E_1 maximal und gilt $s(E_1) = s(E_2)$, so folgt: E_2 ist maximal.

Bew.: Gelte $t \in O\Sigma(E_1)$ sowie $\text{act}(t, M(E_2_n |))$. Zu finden ist ein $t' \in O\Sigma(E_1)$ mit $\text{aff}(t, t')$ und $t' \in E_2(m)$ ($m > n$). (Damit ist alles gezeigt, denn es gilt dann $\neg \text{act}(t, M(E_2_n |))$).

Wegen der im Lemma genannten Voraussetzung existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq (E_2)_n \mid \leq 0 \leq (E_1)_k \mid$. Sei das kleinste derartige k betrachtet. Fallunterscheidung:

1) $\forall_{j \leq k} \forall_{m \geq n} \forall_{t' \in E_1(j)} \text{aff}(t, t') \wedge t' \in E_2(m)$.

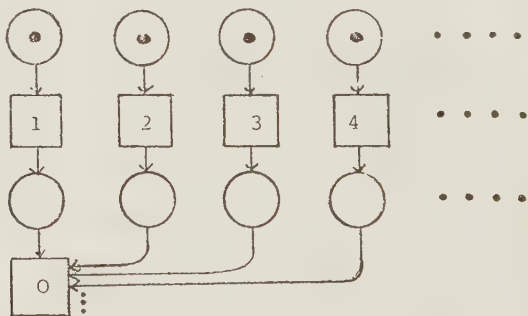
Dann erfüllen m und t' die Behauptung.

2) In $E_1_k \mid$ existieren keine Aktionen, deren ausführende Transitionen zu t benachbart sind, und die in $E_2_n \mid$ nicht auftreten. Nach Lemma 5.2.20.a) folgt aus $\text{act}(t, M(E_2)_n \mid)$, daß gilt $\text{act}(t, M(E_1)_k \mid)$ also schaltet wegen der Maximalität von E_1 ein $t' \in E_1(j)$ für ein $j > k$ sowie $\text{aff}(t, t')$. Wegen $s(E_1) = s(E_2)$ gilt damit $t' \in E_2(m)$ für ein $m > n$.

8.3.6 Bem.: a) Netze mit endlicher Transitionenmenge erfüllen die in 8.3.5 genannte Voraussetzung.

b) Das folgende Beispiel zeigt, daß für Netze, die nicht die Voraussetzung von 8.3.5 erfüllen auch nicht die Aussage von 8.3.5 gelten muß:

8.3.7 Beispiel:



Das oben dargestellte Netz hat unter anderem die folgenden Schaltsequenzen:

$E_1 := \{N\}$ und

$E_2 := \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \dots$

E_1 ist nicht maximal, aber E_2 ist maximal. Trotzdem gilt $s(E_1) = s(E_2)$.

Das folgende Satz liefert die Charakterisierung vollständiger Abläufe mithilfe des Maximalitätsbegriffs.

8.3.8 Satz: Ein Ablauf ist genau dann vollständig, wenn alle seine Sequenzen maximal sind.

Bew.: " $\leq$ ": Sei $K \in S/\mathbb{X}$ nicht vollständig, und bestehe K nur aus maximalen Schaltsequenzen. Nach Definition der Vollständigkeit von Abläufen (8.2.1.a) gibt es ein $L \in S/\mathbb{X}$, sodaß gilt $K \not\leq L$, also $0\mathbb{E}(K) \not\subseteq 0\mathbb{E}(L)$. Sei $t \in 0\mathbb{E}(L) - 0\mathbb{E}(K)$ so gewählt, daß $h(t)$ minimal ist. Dann gilt $[+, t) \in 0\mathbb{E}(K)$ und nach 5.2.25 gilt $(0\mathbb{E}(K) \cup \{t\}, \leq) \equiv \leq_L |_{0\mathbb{E}(K) \cup \{t\}} \in S/\mathbb{X}$.

Sei nun $E^t \in L(0\mathbb{E}(K) \cup \{t\}, \leq)$ gewählt. Durch Streichen von t in E^t wird eine Sequentialisierung E von $(K, \leq_K)$ definiert, die nach Voraussetzung maximal ist. Sei $t \in E^t(n)$. Dann ist t bei $M(E_n |)$ aktiviert.

Sei $m > n$ mit der Eigenschaft, daß $\text{act}(t, M(E_m |))$.

In $E(m)$ schaltet die Nachbartransition t' von t . t' ist nach 5.2.20.b) bei $M(E_{m-1}^t |)$ nicht aktiviert, also ist E^t keine Schaltsequenz. Widerspruch!

" $\Rightarrow$ ": Besitze der Ablauf $K \in S/\mathbb{X}$ eine nicht maximale Schaltsequenz E , für die gilt:

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{t \in \Sigma} \bigwedge_{m \geq n-1} \text{act}(t, M(E_m |)).$$

Für $m \geq n$ gilt also $\text{aff}(t, t')$, falls $t' \in E(m)$. Deshalb wird durch Schalten von t bei $m \geq n$ eine Schaltsequenz E_m^t definiert. Offenbar gilt $E_{m_1}^t \sim E_{m_2}^t$ für

$$m_1, m_2 \geq n. \text{ Deshalb gilt } t' \in \bigwedge_{n} 0\mathbb{E}(E) \text{ mit } t' \leq [E_n^t]_{\mathbb{X}} t'.$$

Wählt man $L := (0\mathbb{E}(K) \cup \{t\}, \leq_{[E_n^t]_{\mathbb{X}}})$, sowie

$$K' := (0\mathbb{E}(K), \leq_{[E_n^t]_{\mathbb{X}} |_{0\mathbb{E}(K)}}), \text{ so gilt } K' \leq L. \text{ Nach 5.2.25}$$

ist $L(K')$ Ablauf. Offenbar ist E Sequentialisierung von K' . (Es gilt nämlich: $t_1 \leq_{[E_n^t]_{\mathbb{X}} |_{0\mathbb{E}(K)}} t_2 \Rightarrow$

$$t_1 \leq_{E_n}^t t_2 \Rightarrow t_1 \leq_E t_2.) \text{ Deshalb gilt } K = L(K'). \text{ Also ist}$$

K echtes Präfix des Ablaufs $L(L)$.

8.3.9 Bem.: Aus der in 8.3.8 gegebenen Charakterisierung vollständiger Abläufe durch maximale Schaltsequenzen sowie aus 8.2.1.b) folgt, daß die Maximalität einer Schaltsequenz E notwendig für die Vollständigkeit von E ist.

8.3.10 Def.: Ein Netz, bei dem die Maximalität einer Schaltsequenz E äquivalent mit der Vollständigkeit von E ist, heißt regulär.

8.3.11 Bem.: Netze, die die Voraussetzung des Lemmas 8.3.5 erfüllen, also insbesondere Netze mit endlicher Transitionenmenge, sind regulär.

Während die vorangehenden Untersuchungen den Vollständigkeitsbegriff bei strengen Netzen veranschaulichen, sollen die folgenden Betrachtungen dazu dienen, die aus diesem Vollständigkeitsbegriff folgende Determiniertheitsdefinition mit der Netzsemantik zu verknüpfen. Die in den Beispielen verwandten Ergebnisbegriffe stehen dabei in der im folgenden Satz angegebenen Weise mit der Netzsemantik in Zusammenhang.

8.3.12 Satz: Sei (E, E) Hausdorffraum. Die Abbildung

$\phi: (S, X) \rightarrow (E, E)$ sei stetig, und es gelte:

$E_1 + E_2 \Rightarrow \phi(E_1) = \phi(E_2)$ für $E_1, E_2 \in S$. Dann läßt sich ϕ zu einem Ergebnisbegriff f_ϕ auf N fortsetzen, sodaß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} (S^V, X) & \xrightarrow{\phi|_{S^V}} & (E, E) \\ & \searrow v|_{S^V} & \nearrow f_\phi \\ & S^V/\mathbb{X} & \end{array}$$

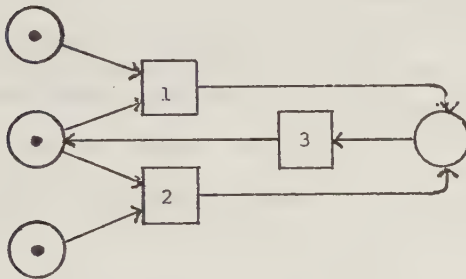
f_ϕ ist durch ϕ eindeutig definiert und es gilt:
 $f_\phi([E]_{\mathbb{X}}) = (E)$ für $E \in S$. v ist hierbei die natürliche Abbildung von $\mathbb{X}$.

Bem.: Wie in 5.2.13 zeigt man, daß gilt $E_1 \sim E_2 \Rightarrow \phi(E_1) = \phi(E_2)$.

8.3.13 Beispiel: Ein Beispiel für den in 8.3.12 angegebenen Sachverhalt liefert die in 5.2.8 definierte Abbildung $s: S \rightarrow \prod_{t \in \mathbb{Z}} \alpha N$.

Es wird im folgenden an drei verschiedenen Netzen die durch den Ergebnisbegriff f_s induzierte Determiniertheitsstruktur untersucht:

a) Das folgende Netz gibt ein Beispiel dafür, daß f_s die feinste Determiniertheitsstruktur eines nicht total determinierten Netzes sein kann:



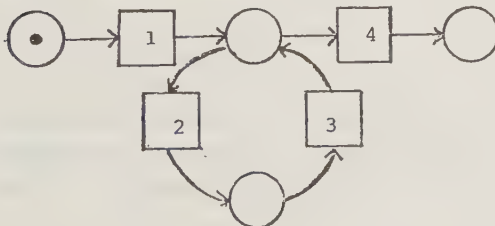
Das oben angegebene Netz hat genau zwei vollständige Schaltsequenzen (bis auf Gleichheit von τ_E):

$$E_1 = \{1\}, \{3\}, \{2\}, \{3\} \quad \text{und}$$

$$E_2 = \{2\}, \{3\}, \{1\}, \{3\}$$

Es gilt $s(E_1) = s(E_2)$, aber $\neg E_1 \approx E_2$.

b) Das folgende Netz gibt ein Beispiel dafür, daß f_s die größte Determiniertheitsstruktur eines nicht total determinierten Netzes sein kann:



Die vollständigen Schaltsequenzen des oben angegebenen Netzes haben (bis auf Gleichheit von r_E) die Form einer der folgenden (abzählbar vielen) Schaltsequenzen:

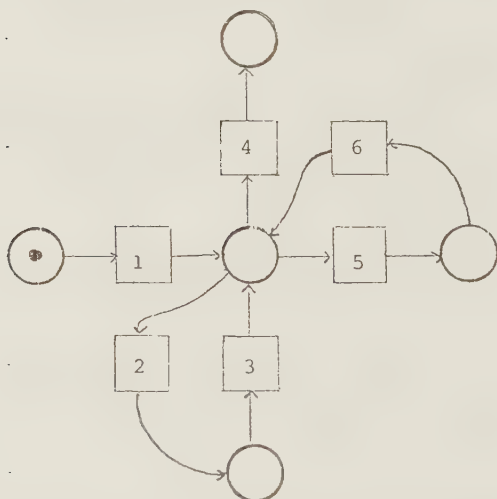
$$E_n = \{1\}, \{2\}, \{3\}^n, \{4\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ bzw.}$$

$$E_\omega = \{1\}, \{2\}, \{3\}^\omega.$$

Für jede der angegebenen Schaltsequenzen liefert s ein anderes Bild.

Dieses Netz ist gleichzeitig ein Beispiel für ein Netz mit endlicher Transitionen- und Stellenmenge, das unendlich viele verschiedene vollständige Abläufe hat.

c) Das folgende Netz gibt ein Beispiel dafür, daß f_s weder die feinste noch die grösste Determiniertheitsstruktur eines Netzes sein muß:



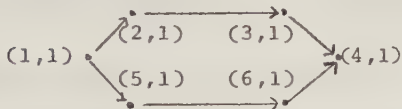
Da jede der in b) angegebenen Schaltsequenzen auch hier vollständige Schaltsequenz ist, ist f_s nicht die feinste Determiniertheitsstruktur auf dem oben angegebenen Netz.

Ferner gehören die Schaltsequenzen

$$E_1 = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{4\} \quad \text{und}$$

$$E_2 = \{1\}, \{5\}, \{6\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$$

verschiedenen Abläufen an. Denn wäre $E_1 \times E_2$, so würde die Ordnungsrelation $\leq_{[E_1]_X}$ größer als die durch das folgende Hasse-Diagramm dargestellte Ordnung sein:



Damit wäre

$$E_3 = \{1\}, \{2,5\}, \{3,6\}, \{4\}$$

als Sequentialisierung von $\leq_{[E_1]_X}$ Schaltsequenz.

Widerspruch!

Der folgende Satz gibt eine wichtige Charakterisierung total determinierter Netze.

8.3.14 Def.: Ein Netz (N,M) heißt KONFLIKTFREI, wenn gilt:

$$M' \in [M] \quad t_1, t_2 \in \Sigma \quad t_1 \kappa_M t_2 \Rightarrow t_1 = t_2.$$

8.3.15 Satz: Ein Netz (N,M) ist genau dann total determiniert, wenn es konfliktfrei ist.

Bew.: " $\Rightarrow$ ": Existiere eine Markierung $M' \in [M]$, bei der zwei verschiedene Transitionen t_1, t_2 in Konflikt stehen: $t_1 \kappa_M t_2$. Sei $E \in S$ eine (endliche) Schaltsequenz mit $M[E] = M'$. Es werden zwei vollständige Fortsetzungen E_1 und E_2 konstruiert, die nicht äquivalent sind.

Sei $s_t(E_1) = k$, $s_t(E_2) = l$. Man definiert:

$$E'_1 := E, \{t_1\} \quad , \quad E'_2 := E, \{t_2\}.$$

Nach §.2.2 besitzen E'_1 und E'_2 vollständige Fortsetzungen E_1 bzw. E_2 .

Fallunterscheidung:

$$a) \quad m \wedge_{n+1} (t_2, l+1) \notin E_1(m) \vee m \wedge_{n+1} (t_1, k+1) \notin E_2(m).$$

In diesem Falle gilt $s_{t_2}(E_1) \neq s_{t_2}(E_2) \vee s_{t_1}(E_1) \neq s_{t_1}(E_2)$
also $s(E_1) \neq s(E_2)$ und damit $\neg E_1 \times E_2$.

b) Sonst gilt $(t_2, l+1) >_{E_1} (t_1, k+1)$
sowie $(t_2, l+1) <_{E_2} (t_1, k+1)$.

Würde also $E_1 \times E_2$ gelten, so wären $(t_2, l+1)$ und
 $(t_1, k+1)$ unvergleichbar in $\leq_{[E_1]_x}$ also t_1, t_2
nicht benachbart in N (nach 5.2.19), was $t_1 \kappa_M t_2$
widerspricht.

"<=": Um das Beweisschema 5.2.22 anwenden zu können,
wird zunächst gezeigt, daß für $K, K' \in S^V / \sim$ gilt:
 $s(K) = s(K')$ bzw. $O\Sigma(K) = O\Sigma(K')$:

Sei dazu $n \geq -1$ sowie

$A_n := \{x \mid h_{\leq K}(x) = n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, $A_{-1} := \emptyset$,

$B_n := \{x \mid h_{\leq K'}(x) = n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, $B_{-1} := \emptyset$.

Induktiv wird gezeigt, daß gilt $A_n = B_n$ für $n \geq -1$:
 $n = -1$: trivial.

$n+1$: Sei $x = (t, j) \in O\Sigma$ mit $h_{\leq K}(x) = n+1$. Sei $V(A_n)$ der
charakteristische Vektor von $\bigcup_{k \leq n} A_k$, also für $t \in \Sigma$
 $V(A_n)(t) := \max\{k \mid h_{\leq K}(t, k) \leq n\}$. Entsprechend sei
 $V(B_n)$ definiert. Sei $E := A_0, A_1, \dots, A_n$. Nach 5.2.25
ist E Schaltsequenz und es gilt nach Induktions-
voraussetzung:

$$M(E) = M + (B - F)V(A_n) = M + (B - F)V(B_n) =: M'.$$

Da nach 5.2.25 wegen $h_{\leq K}(x) = n+1$ auch $E, \{t\}$ Schalt-
sequenz ist, gilt $\text{act}(t, M')$. Nach 2.2.22 ist
 $E = B_0, B_1, \dots, B_n$ zu einer vollständigen Schaltsequenz
(von K') fortsetzbar. Nach 8.3.9 ist E^V maximal.

Daher existiert $m > n$ mit $\neg \text{act}(t, M(E^V_m |))$. Aufgrund
der Konfliktfreiheit von N kann t nur durch sein
eigenes Schalten deaktiviert werden. Also gilt:

Es existiert $m > n$ mit $t \in E^V(m)$. Sei m minimal mit dieser Eigenschaft gewählt. Dann gilt für

$$E^V = A_0, \dots, A_n, E^V(n+1), \dots, E^V(m-1), T \cup \{t\}, E^V(m+1), \dots$$

$$E' := A_0, \dots, A_n, \{t\}, E^V(n+1), \dots, E^V(m-1), T, E^V(m+1), \dots$$

$E^V \sim E'$, da für $n < j \leq m$ und $t' \in E^V(j)$ gilt $\text{raff}(t, t')$ (aufgrund der Konfliktfreiheit von N und der Minimalität von m). E' ist somit Sequentialisierung von K' , und es gilt $h_K(x) \leq i_{E'}(x) = n+1$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt ferner $x \notin A_n = B_n$, also $h_K(x) \geq n+1$. Daraus folgt $A_{n+1} \subset B_{n+1}$.

Die andere Richtung zeigt man analog.

Nun wird das Beweisschema 5.2.22 angewandt. Dazu ist noch die Voraussetzung V zu zeigen. Gezeigt wird wieder induktiv $E_{n+1}^k \sim E_{n+1}^{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Sei diese Behauptung für $k-1$ gezeigt.

$$E_{n+1}^k = E'(1), \dots, E'(n), E_{n+1}^k(n+1), \dots, T := E_{n+1}^k(i_k), \\ E_{n+1}^k(i_k+1), \dots$$

$T := E_{n+1}^k(i_k+1) \cap E'(n+1)$ ist bei $M(E_{n+1}^k | n)$ aktiviert, da $E'(1), \dots, E'(n+1)$ Schaltfolge ist. Ferner schaltet kein $t \in T_1$ in $E_{n+1}^k(j)$ für $n < j < i_k+1$. Da N konfliktfrei ist, ist T_1 also bei allen Markierungen $M(E_{n+1}^k | j)$ für $n < j < i_k+1$ aktiviert und der Transformationsprozeß ist somit durchführbar.

8.3.16 Lemma: Es gibt konfliktfreie Netze mit maximalen Schaltsequenzen, die keinem gemeinsamen Ablauf angehören.

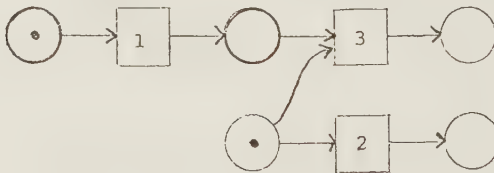
Bew.: In dem in 8.3.7 angegebenen Netz sind die Schaltsequenzen $N, \{0\}$ und $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots$ maximal aber bezüglich $\times$ nicht äquivalent.

8.4 Ergänzende Bemerkungen zum Zusammenhang zwischen der Semantik der strengen Netze und ihrer unterliegenden Nebenläufigkeitsstruktur

Satz 8.3.15 läßt die Existenz eines fundamentalen Zusammenhanges zwischen der einem Netz unterliegenden Nebenläufigkeitsstruktur und seinen Eigenschaften in bezug auf Konflikte vermuten. Deshalb soll im folgenden versucht werden, Schaltsequenzen, die demselben Ablauf angehören, als solche zu interpretieren, die Konflikte "auf dieselbe Weise" lösen. Die Strategie eines Ablaufs kann dann als Anleitung zum Lösen von Konflikten verstanden werden.

Daß dies nicht in allen Fällen möglich ist, zeigt das folgende Beispiel.

8.4.1 Beispiel:



Das oben dargestellte Netz hat unter anderem die folgenden Schaltsequenzen:

$$E_1 = \{1, 2\} \quad \text{und} \quad E_2 = \{1\}, \{2\}.$$

Dabei gilt $E_1 \times E_2$. In E_1 werden jedoch nur triviale Konflikte der Form $t \kappa_M t$ gelöst. Mit der zweiten Schaltung löst E_2 jedoch den nichttrivialen Konflikt $2 \kappa_M(E_2 \mid 0) 3$.

Die Bedingung, die ein Netz erfüllen muß, damit seine Ablaufstrategien als Anleitungen zum Lösen von Konflikten interpretiert werden können, wurde schon von A. W. Holt im Zusammenhang mit Petri-Netzen untersucht. Sie heißt "Chinese Menu"-Bedingung.

Sei im folgenden wiederum (N, M) ein markiertes Netz.
Gegebenenfalls bezeichne N auch die unterliegende
Nebenläufigkeitsstruktur.

8.4.2 Def.: Die KONFLIKTKLASSE einer Transition $t \in \Sigma$ bei
einer Markierung $M' \in [M]$ wird definiert als:

$$K(t, M') := \{t' \mid t' \kappa_M t\}.$$

8.4.3 Bem.: Da κ_M , im allgemeinen nur symmetrisch und nicht
transitiv ist, bilden die Konfliktklassen im all-
gemeinen keine Zerlegung der Menge der aktivierten
Transitionen.

Offenbar entstehen die Schwierigkeiten in 8.4.1 da-
durch, daß die vor dem Schalten von $E_2(1)$ schon nicht-
leere Konfliktklasse $K(2, M(E_2 \circ 1))$ nach dem Schalten
von $E_2(1)$ vergrößert ist. Um derartiges auszuschlie-
ßen, wird definiert:

8.4.4 Def.: (N, M) BESITZT DIE "CHINESE MENU"-EIGENSCHAFT,
wenn gilt:

$$CM(N, M) := \langle \Rightarrow \bigwedge_{E \in S} \bigwedge_{t \in \Sigma} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} K(t, M(E_n \mid)) \neq \emptyset \Rightarrow \\ K(t, M(E_{n+1} \mid)) = \emptyset \vee K(t, M(E_{n+1} \mid)) = K(t, M(E_n \mid)) \rangle$$

Der Name dieser Eigenschaft lehnt sich an den in einem
chinesischen Restaurant üblichen Brauch an, beim Ver-
zehren eines Menüs bei jedem Gang unabhängig eine Spei-
se aus einer für diesen Gang vorgesehenen Anzahl von
Speisen auswählen zu dürfen.

8.4.5 Lemma: $CM(N, M) \Rightarrow \bigwedge_{M' \in [M]} \kappa_{M'}$ ist transitiv.

Bew.: Sei $t_1 \kappa_{M'} t_2$, $t_2 \kappa_{M'} t_3$, $t_1 \kappa_{M'} t_3$. Schaltet t_3
bei M' so gilt $(M' \setminus \{t_3\} > M'')$: t_2 ist bei M'' nicht
aktiviert; jedoch t_1 . Damit gilt: $K(t_1, M') \supset \{t_1, t_2\}$,
 $t_2 \notin K(t_1, M'') \supset \{t_1\}$. Widerspruch zu $CM(N, M)$!

8.4.6 Bem.: Die Rückrichtung der Aussage von Lemma 8.4.5 gilt im allgemeinen nicht, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Das in 8.4.1 betrachtete Netz erfüllt nicht die Chinese-Menu Eigenschaft, aber die Konfliktrelationen aller erreichbaren Markierungen sind transitiv.

Die Chinese-Menu Eigenschaft bedeutet eine sehr starke Einschränkung der Klasse der strengen Netze. Jedes konfliktfreie Netz besitzt jedoch die Chinese-Menu Eigenschaft.

Die folgende Konstruktion soll dazu dienen, die "Geschichte" der während einer Schaltsequenz getroffenen Entscheidungen zur Konfliktlösung darzustellen.

8.4.7 Def.: Sei $E \in S$ sowie $x = (t, \pi) \in E(n+1)$. Die Menge

$$K(x, E) := \{x' = (t', m') \mid t' \in K(t, M(E_n \mid)) \wedge m' = s_{t'}(E_n \mid) + 1\}$$

heißt die KONFLIKTKLASSE von x bezüglich E .

8.4.8 Bem.: 8.4.7 interpretiert die Elemente der auf Markierungen bezogenen Konfliktklasse von t (8.4.2) als Aktionen.

8.4.9 Def.: Sei $E \in S$. Die ENTSCHEIDUNGSMENGE (oder GESCHICHTE DER KONFLIKTLÖSUNGEN) von E ist definiert durch:

$$K(E) := (K(x, E))_{x \in O\Sigma(E)}.$$

Der folgende Satz sagt aus, daß, wenn das Netz die Chinese-Menu Eigenschaft erfüllt, Abläufe durch Entscheidungsmengen charakterisiert werden können.

8.4.10 Satz: Seien $E_1, E_2 \in S$. Erfülle (N, M) die Chinese-Menu Eigenschaft. Dann gilt:

$$K(E_1) = K(E_2) \iff E_1 \approx E_2.$$

Bew.: " $\leq$ ": Die Behauptung wird bewiesen, indem aus $K := [E_1]_K$ eine "kanonische" Sequenz $E(K, x)$ für $x = (t, k) \in O\Sigma(E_1)$ ausgewählt wird und gezeigt wird, daß gilt: $K(x, E(K, x)) = K(x, E_1)$.

Sei dazu E die Sequenz der Höhe $m := h_{\leq K}(x) - 1$, die definiert ist durch $E(j) := \{y \mid h_{\leq K}(y) = j \wedge y \leq_K x\}$ für $j \leq m$. Nach 2.2.22 läßt sich E zu einer Sequentialisierung $E(K, x)$ von K fortsetzen. Ferner ist t bei $M(E)$ aktiviert, da sich auch $E, \{x\}$ zu einer Sequentialisierung von K fortsetzen läßt. (Es gilt nämlich $O\Sigma(E) = [+ , x]$.) Da E_1 Sequentialisierung von $(K, \leq_K)$ ist, gilt $O\Sigma(E_1 \upharpoonright_n) \supset O\Sigma(E)$ für $n = i_{E_1}(x)$. Nach 2.2.22 läßt sich E zu einer Sequentialisierung E' von $(O\Sigma(E_1 \upharpoonright_n), \leq_K \upharpoonright_{O\Sigma(E_1 \upharpoonright_n)})$ fortsetzen, die wegen $h_{\leq K}(y) \leq n$ für alle $y \in O\Sigma(E_1 \upharpoonright_n)$ sogar endlich (mit Höhe j) gewählt werden kann. Nach Definition von E gilt dabei $\text{raff}(t, t')$ für $t' \in O\Sigma(E_1 \upharpoonright_n) - O\Sigma(E)$. Deshalb ist t bei $M(E' \upharpoonright_m)$ für $n \leq m < j$ aktiviert. Da $O\Sigma(E_1 \upharpoonright_n) = O\Sigma(E')$ gilt, folgt $M(E_1 \upharpoonright_n) = M(E')$, also $K(t, M(E_1 \upharpoonright_n)) = K(t, M(E'))$. Die Chinese-Menu Eigenschaft sichert $K(t, M(E')) = K(t, M(E))$. Daraus folgt, daß gilt $K(t, M(E)) = K(t, M(E_1 \upharpoonright_n))$, also auch $K(x, E(K, x)) = K(x, E) = K(x, E_1 \upharpoonright_n) = K(x, E_1)$. (Es gilt nämlich $\text{raff}(t, t')$ für $t' \in O\Sigma(E_1 \upharpoonright_n) - O\Sigma(E)$, und $O\Sigma(E) \subset O\Sigma(E_1 \upharpoonright_n)$.)

" $\Rightarrow$ ": Der Beweis verläuft wieder nach dem Beweisschema 5.2.22. Da mit $K(E) = K(E')$ auch $s(E) = s(E')$ gilt, ist nur noch die Voraussetzung V zu zeigen.

V wird wiederum induktiv gezeigt, indem von E_{n+1}^k

zu E_{n+1}^{k+1} fortgeschritten wird.

$E_{n+1}^k = E'(0), \dots, E'(n), E_{n+1}^k(n+1), \dots, T := E_{n+1}^k(i_k),$
 $E_{n+1}^k(i_k+1), \dots$

Dabei ist $E_{n+1}^k(i_k+1) = T_1 \cup T_2$ mit $T_1 := E_{n+1}^k(i_k+1) \cap E'(n+1)$ und $T_2 := E_{n+1}^k(i_k+1) - T_1$. T_1 ist bei $M(E'_n) = M(E_{n+1}^k \mid n)$ aktiviert und keine Transition aus T_1 ist in $E_{n+1}^k(j)$ für $n < j \leq i_k$ enthalten. Sei $t \in T_1$. Dann ist keine Transition $t' \in E_{n+1}^k(j)$ für $n < j \leq i_k$ mit t benachbart. Wäre dies nämlich der Fall, so betrachte man ein derartiges t' mit minimalem Index $i_k(t') = j$. Dann gilt $\text{act}(T_1, M(E_{n+1}^k \mid j-1))$ und somit $t' \in K(t, M(E_{n+1}^k \mid j-1))$. Also gilt $t' \in K(t, M(E'_n \mid n))$ wegen $CM(N, M)$. Daraus folgt $t' \in K(t, E')$. Nun gilt aber $t' <_{E_{n+1}^k} t$. Damit gilt auch $t' <_E t$ und somit $t' \notin K(t, E)$. Widerspruch!

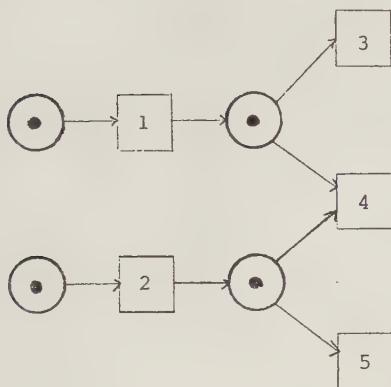
Der folgende Satz zeigt, daß die Chinese-Menu Eigenschaft auch notwendig für die Darstellung von Abläufen durch Konflikte ist.

8.4.11 Satz: Gilt $\neg CM(N, M)$, so existieren $E, E' \in S$ mit $E \sim E'$ und $K(E) \neq K(E')$.

Bew.: Sei $E \in S, \emptyset \neq K(t, M(E_{n+1})) \neq K(t, M(E_n)) \neq \emptyset$ für ein $t \in \Sigma$. Wegen $K(t, M(E_n)) \neq \emptyset$ gilt $\text{act}(t, M(E_n))$. Für $E' := E_n \mid \{t\}, E(n+1)$ und $E'' := E_n \mid E(n+1), \{t\}$ gilt $E' \sim E''$. Denn wegen $K(t, M(E_{n+1})) \neq \emptyset \neq K(t, M(E_n))$ gilt für alle $t' \in E(n+1)$ $\neg \text{aff}(t, t')$, also ist $E_n \mid E(n+1) \cup \{t\}$ Schaltsequenz. Es gilt jedoch $K(t, E') \neq K(t, E'')$: Zum Beweis dieser Aussage sei angenommen $K(t, E') = K(t, E'')$. Dann gilt ebenfalls $K(t, M(E'_n)) = K(t, M(E''_{n+1}))$. Es gilt aber $M(E'_n) = M(E_n)$ und $M(E''_{n+1}) = M(E_{n+1})$. Widerspruch!

Hat (N, M) nicht die Chinese-Menu Eigenschaft, so ist die in 8.4.10 betrachtete Äquivalenzrelation $E_1 \pi E_2 : \Leftrightarrow K(E_1) = K(E_2)$ nicht notwendig Ablaufbegriff.

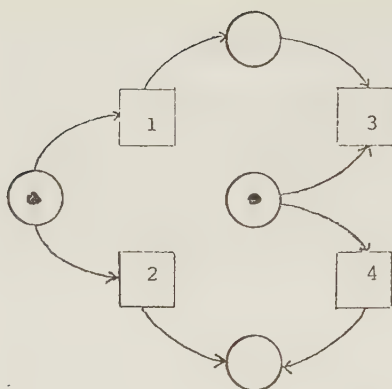
8.4.12 Beispiel: a) Das nachstehend dargestellte Netz erfüllt nicht die Chinese-Menu Bedingung. Die über die Gleichheit der Entscheidungsmengen definierte Äquivalenzrelation π (siehe 8.4.10) ist kein Ablaufbegriff auf der Schaltsequenzenmenge des Netzes.



Das Netz hat unter anderem die Schaltsequenzen $E_1 = \{3\}, \{1\}, \{5\}, \{2\}$ und $E_2 = \{5\}, \{2\}, \{3\}, \{1\}$.

Sie haben die gleiche Entscheidungsmenge, müßten also bezüglich π äquivalent sein. Die Ablaufstrategie $\tau_{[E_1]}^\pi$ müßte somit größer sein als die durch das folgende Hasse-Diagramm dargestellte Ordnung: $(3,1) \rightarrow (1,1) \quad (5,1) \rightarrow (2,1)$. Damit wäre $\{3\}, \{5\}, \{1\}, \{2\}$ Schaltsequenz. Widerspruch!

b) Das nachstehend dargestellte Netz erfüllt nicht die Chinese-Menu Bedingung. Die über die Gleichheit der Entscheidungsmengen definierte Äquivalenzrelation ist der triviale Ablaufbegriff auf der Schaltsequenzenmenge des Netzes und unterscheidet sich von $\times$.



Schaltsequenz

Entscheidungsmenge

{1}

$K(1) = \{1, 2\}$

{2}

$K(2) = \{1, 2\}$

{4}

$K(4) = \{4\}$

{1, 4}

$K(1) = \{1, 2\}; K(4) = \{4\}$

{1}, {4}

$K(1) = \{1, 2\}; K(4) = \{3, 4\}$

{4}, {1}

$K(1) = \{1\}; K(4) = \{4\}$

{1}, {3}

$K(1) = \{1, 2\}; K(3) = \{3, 4\}$

$K(t)$ ist hierbei für $t \in O\Sigma(E)$ eine Abkürzung für $\{t' \mid (t', 1) \in K((t, 1), E)\}$.

Bezeichnungen:

Mengenlehre

N	Menge der natürlichen Zahlen
$\tilde{N}$	$N - \{0\}$
$P(X)$	Potenzmenge von X
CX	Komplement der Menge X
$\text{Trans}(\tau)$	Transitive Hülle der Relation τ
τ^{-1}	$\{(y, x) \mid (x, y) \in \tau\}$
X/π	Quotientenmenge von X bezüglich der Äquivalenzrelation π
$[x]_{\pi}$	Äquivalenzklasse von $x \in X$ bezüglich π
$[x_1, x_2]$	Ordnungsintervall zwischen x_1 und x_2 in einer (dem Kontext zu entnehmenden Ordnung $\leq$): $\{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$
$[+, x)$	$\{y \mid y < x\}$
$A \wedge x$	$\bigwedge_{a \in A} a < x$
Δ_X	$\{(x, x) \mid x \in X\}$
$ X $	Kardinalzahl von X

Topologie

$U(x)$	Umgebungsfilter von x
D_X	Diskrete Topologie auf X

Folgen über $P(X)$

E_n	Die ersten n Folgenglieder einer Folge E : $E_n(j) := \begin{cases} E(j) & \text{für } j \leq n \\ \emptyset & \text{für } j > n \end{cases}$
E_1, E_2	Die Konkatenation der endlichen Folge E_1 mit der Folge E_2 : $E_1, E_2(j) := \begin{cases} E_1(j) & \text{falls } k \geq j \text{ existiert mit } E_1(k) \neq \emptyset \\ E_2(j) & \text{sonst} \end{cases}$
$(E)^n$	Die n -fache Konkatenation von E mit sich selbst ($n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, E endlich)
$(E)_{n \in [n_1, n_2]}$	Die konsekutive Konkatenation der endlichen Folgen E_n nach der Größe der Indizes $n \in [n_1, n_2]$

Literaturverzeichnis:

- IFIP Congress of the International Federation for Information Processing
- JACM Journal of the Association for Computing Machinery
- JCSS Journal of Computer and System Sciences
- SWAT Annual Conference on Switching and Automata Theory
-
- ACM 70 ACM, Project MAC: Record of the Project MAC Conference on Concurrent Systems and Parallel Computation. ACM, New York (1970)
- Ad 68 D.A. Adams: A Computation Model with Data-Flow Sequencing. Ph.D. thesis, Stanford Univ. (1968)
- BrMi 71 W.A. Brinsfield/R.E. Miller: On the Composition of Parallel Program Schemata. XII. SWAT (1971)
- CHEP 71 F. Commoner/A.W. Holt/S. Even/A. Pnueli: Marked Directed Graphs. JCSS 5 (1971)
- DenJ 72 J.B. Dennis: Concurrency. Lecture Notes of the Advanced Course on Software Engineering. TU München (1972). (erschienen als Nr. 81 der Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer 1973)
- DeFo 73 J.B. Dennis/J.B. Fosseen: Introduction to Data-Flow Schemas. Memo 81 Computation Structures Group, Project MAC, MIT (1973)
- GeLa 73 H.J. Genrich/K. Lautenbach: Synchronisationsgraphen. Acta Informatica 2 (1973)
- Hac 72 M.H.T. Hack: Analysis of Production Schemata by Petri-Nets. S.M. thesis, Dep. of Elec. Eng. MIT (1972)
- Hac 74 M.H.T. Hack: Decision Problems for Petri-Nets and Vector Addition Systems. Memo 95 Computation Structures Group, Project MAC, MIT (1975)
- Hac 75 M.H.T. Hack: The Equality Problem for Vector Addition Systems is Undecidable. Memo 121 Computation Structures Group, Project MAC, MIT (1975)

- Holt 68 A.W. Holt et al.: Information Systems Theory Project, Final Report. RADC-TR-68 305, Applied Data Research Incorporation, Princeton, N.J. (1968)
- Holt 74 A.W. Holt: Final Report for the Project 'Development of Theoretical Foundations for Description and Analysis of Discrete Information Systems', Volume I (Semantics) and Volume (II) (Mathematics). CADD-7405-2011 Mass. Comp. Ass. Inc., Wakefield Mass. (1974)
- KaMi 66 R.M. Karp/R.E. Miller: Properties of A Model for Parallel Computations: Determinacy, Termination, Queueing. J. Appl. Math. 14 (1966)
- KaMi 69 R.M. Karp/R.E. Miller: Parallel Program Schemata. JCSS 3 (1969)
- Kel 73 R.M. Keller: Parallel Program Schemata and Maximal Parallelism I. JACM 20 (1973)
- Lau 73 K. Lautenbach: Exakte Bedingungen der Lebendigkeit für eine Klasse von Petri-Netzen. Berichte der GMD Nr. 82, Bonn (1973)
- LaSch 74 K. Lautenbach/H.A. Schmid: Use of Petri-Nets for Proving Correctness of Concurrent Process Systems. IFIP (1974)
- Len 75 Th. Lengauer: Mathematische Strukturen nebenläufiger Systeme. Diplomarbeit am Fachbereich 19 der Freien Universität Berlin (1975)
- Löh 74 K.-P. Löhr: Datenflußgesteuerte Koppelung nichtsequentieller Systeme. Diss. TU-Berlin (1974)
- PeBr 74 J.L. Peterson/T.H. Bredt: A Comparison of Models of Parallel Computation. IFIP (1974)
- Pet 61 C.A. Petri: Kommunikation mit Automaten. Diss. TH-Darmstadt (1961). (Erschienen als Nr. 2 der Schriften des Instituts für instrumentelle Mathematik, Univ. Bonn (1962))
- Preu 72 G. Preuß: Allgemeine Topologie. Springer Berlin (1972)

L E B E N S L A U F

Thomas Lengauer, geboren am 12. November 1952 in Berlin.

April 1965: Abschluß der Grundschule.

Februar 1970: Teilnahme am Wettbewerb "Jugend forscht" im Bereich Mathematik/Datenverarbeitung mit der Arbeit "Geometrische Eigenschaften höherdimensionaler Körper". Zuerkennung des 2. Preises des Landeswettbewerbes Berlin.

Juli 1970: Beginn der Programmierstätigkeit am Hahn-Meitner Institut für Kernforschung Berlin GmbH (HMI).

Februar 1971: Bestehen der Reifeprüfung.

April 1971: Immatrikulation am Fachbereich 19 (Mathematik) der Freien Universität Berlin.

April 1971 bis September 1975: Anstellung am HMI im Bereich Datenverarbeitung/Elektronik als studentischer Mitarbeiter.

April 1972: Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes.

Juli 1972 bis September 1972: Aufenthalt am Rechenzentrum C.E.T.I.S. des EURATOM-Kernforschungszentrums Ispra/Italien als studentischer Mitarbeiter.

Februar 1973: Bestehen der Vordiplomprüfung im Fach Mathematik mit Physik als Nebenfach.

Juni 1975: Bestehen der Diplomprüfung im Fach Mathematik mit Physik als Nebenfach.

Juli 1975: Vortrag "On the Behaviour of Systems Represented by Nets" bei der "Conference on Petri-Nets and Related Methods" am Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts U.S.A.

September 1975: Beginn eines Ph.D.-Studiums am Computer Science Department der Stanford University, California U.S.A.

